ELEMENTI
DI MECCANICA
E
D' IDRAULICA

DI

GIUSEPPE VENTUROLI

PROFESSORE DI MATEMATICA APPLICATA

Nella R. Università di Bologna.

SECONDA EDIZIONE

VOLUME SECONDO.

BOLOGNA 1809.

Tipografia de' Fratelli Masi, e Comp.

PREFAZIONE

Riguardando allo stato nel quale di presente si trova la Scienza Idraulica, ho dovuto conoscere con quanta cura si convenga esaminare e discernere i diversi principj de' quali ella si giova. Poichè non tutte le parti della Scienza hanno ugual fondamento di sicurezza. I principj universali dell' Idraulica derivati da quelli della Meccanica partecipano della stessa loro evidenza, e quelle proposizioni che immediatamente ne

discendono sono per verità saldissime ed inconcusse. Ma nell' applicazione di questi principj, e nel maneggio delle equazioni che li rappresentano, ben tosto avviene che s' incontrino tali difficoltà e tali inciampi, che non permettono di passar oltre. Quindi la necessità d' ajutarsi d' alcune ipotesi acconcie a spianare la via. Colla scorta di queste, si cammina speditamente, e si procede buon tratto. Ma per esser certi di non traviare, il lume è a chiedere dell' esperienza, che la realtà delle supposte condizioni ponga in chiaro, o per lo meno ne confermi i risultati. Ora secondo che questo lume più o meno rischiara le diverse ipotesi, più o men certezza risiede nelle conseguenze che se ne traggono. Di quì la diversa credibilità delle proposizioni Idrauliche, potendosi altre tener per certe, altre probabili qual più qual meno; e ve n' ha ancora di quelle che a dir vero si attengono a un debol filo, e si rimangono nel puro grado d' ipotesi.

Essendo le cose a tal termine, ben si vede quanto convenga tentare il guado ad ogni passo, nè prima posare il piede che non siasi esplorato come regga il terreno. Il perchè ho posto tutto lo studio nell' ordinar le dottrine per modo che ad ogni proposizione il giovine allievo possa facilmente discernere la catena di quelle da cui deriva, e così vedere la confidenza ch' ei può riporvi; nè tenga per dimostrato quel che non è che probabile; nè ciecamente s' affidi a dubbiosa scorta. Ed ove non può aggiungere alla precisa misura, sappia appagarsi di riconoscere i limiti che la circoscrivono; la cognizione de' quali accompagnata da buon giudicio, le più volte è norma bastante alle pratiche operazioni.

Ora se questi Elementi ottengano il fine a cui ho mirato nel comporli, qual è appunto d' ispirare ai giovani un sano criterio de' principj dell' Idrometria, e una prudente cautela nell' applicarli, io crederò d' avere della mia fatica ritratto non lieve frutto.

ELEMENTI D'IDRAULICA

LIBRO PRIMO

DELL' EQUILIBRIO DE' FLUIDI

CAP. I.

Nozioni preliminari.

1. IDRAULICA è la scienza dell' equilibrio, e del moto de' fluidi. Seguendo le denominazioni usate nella divisione della Meccanica, quella parte che riguarda l' equilibrio de' fluidi chiameremo *Idrostatica*: quella che riguarda il moto, *Idrodinamica*.

2. *Fluido* è quel corpo le cui particelle elementari sono del tutto sciolte, e fra loro sconnesse.

3. Ne' *Fluidi incompressibili* o *Liquidi* la densità non varia considerabilmente nè per pressione, nè per temperatura; almeno entro i limiti delle pressioni, e delle temperature mezzane. Tali sono l' acqua, l' olio, il mercurio.

4. Non richiediamo adunque ne' liquidi

assoluta incompressibilità, ma soltanto sensibile. E però vi annoveriam l'acqua, avvegnachè si pretenda che sotto enormi pressioni giunga a costiparsi alcun poco.

Tutti i liquidi poi si dilatano pel calore; ma questa dilatazione è piccolissima per tutto l'intervallo fra le temperature del ghiaccio e dell' acqua bollente. Nell' acqua è di $\frac{1}{2500}$ per ogni grado del termometro centigrado, nel mercurio di $\frac{1}{5412}$.

La rarefazione de' liquidi pel calore non procede equabilmente, ma per lo più è minore nelle temperature più basse, maggiore nelle più alte. Pure il divario nell' acqua è molto piccolo, nel mercurio poi è affatto insensibile.

5. Ne' *Fluidi compressibili*, o *Fluidi elastici* al cangiar la pressione e la temperatura cangia considerabilmente la densità. Tale è l'aria tali i vapori, e generalmente tutti i fluidi aeriformi.

6. Se la temperatura è costante, la densità dell' aria è proporzionale alla pressione (I. 343). E questa proporzione credesi valere anche per gli altri fluidi aeriformi, per lo meno nelle compressioni mezzane.

L'aria pura ed asciutta si dilata equabil-

mente di $\frac{1}{268}$ per ogni grado di cui cresca la temperatura (I. 345). Ma i vapori si dilatano di più; e non già equabilmente, ma più nelle alte temperature che non nelle basse. Nell' aria atmosferica secondo che trovasi più o meno pregna d' umidità, i cangiamenti della densità partecipano di quelli che convengono all' aria pura, e di quelli che convengono ai vapori acquei.

CAP. II.

Teoria generale dell' equilibrio de' fluidi.

7. PROPOSIZIONE. Sia Z (Fig. 1) un punto qualunque d' una massa fluida equilibrata, corrispondente alle coordinate ortogonali $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; ed ivi sia la pressione $= p$, la densità $= q$ e P, Q, R le forze acceleratrici agenti secondo le coordinate rispettive x, y, z. Sarà l' equazione dell' equilibrio

$$dp = q(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Prendasi ad elemento della massa fluida il parallelepipedo rettangolo Zl, che ha per lati $ZP = dx$, $ZQ = dy$, $ZR = dz$; e sarà la massa $Zl = q\,dx\,dy\,dz$. Essendo poi la pressione p funzione delle tre varia-

bili x, y, z pongasi $dp = Ldx + Mdy + Ndz$.

L' elemento Zl è spinto secondo le x con forza $= Pq\,dx\,dy\,dz$. Di più la pressione p agendo sulla faccia $Zr = dy\,dz$ spinge essa pure quell' elemento secondo le x con forza $= p\,dy\,dz$; e la pressione $p + L\,dx$ agendo sulla faccia eguale ed opposta Pl lo rispinge in contrario con forza $= (p + L\,dx)\,dy\,dz$. Sottraendo questa pressione dalla precedente troviamo che l' elemento Zl è premuto nel senso delle x con forza $= -L\,dx\,dy\,dz$.

Perciò avendo riguardo così alla forza acceleratrice, come alle pressioni, scorgesi che la massa elementare Zl è sospinta secondo le x con forza $= (Pq - L)\,dx\,dy\,dz$. Allo stesso modo si trova essere sospinta secondo le y con forza $= (Qq - M)\,dx\,dy\,dz$, e secondo le z con forza $= (Rq - N)\,dx\,dy\,dz$.

Ora per l' equilibrio dee ciascuna di queste forze annullarsi; e però dovrà essere

$$L = Pq \;;\quad M = Qq \;;\quad N = Rq$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per dx, dy, dz, poi sommandole, risulta

$$dp = q\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

5. *Coroll. I.* Se niun altra forza acceleratrice anima il fluido fuor della gravità, prenderemo le ordinate z verticali, e dirette all' ingiù, ed esprimeremo la gravità ac-

celeratrice per l' unità. Quindi $P = o$, $Q = o$, $R = 1$; e sarà l' equazione dell' equilibrio pe' fluidi gravi $dp = q\,dz$.

9. *Coroll. II.* Qui essendo dp differenziale esatta, dovrà pur esserlo $q\,dz$; onde è forza che q ed anche p siano funzioni della sola variabile z. Adunque in ogni sezione orizzontale d'un fluido grave in equilibrio la densità e la pressione sono necessariamente uniformi.

10. *Scolio I.* È necessario fissar precisamente il significato della lettera p disegnata ad esprimere la pressione, essendone per tutto il presente Trattato l'uso grandissimo. Ad esprimer dunque una data pressione esercitata sopra una minima base dk immagino una colonna prismatica omogenea della densità $= 1$, che normalmente insista sulla base dk, e la gravi di tutto il suo peso; e sia tant' alta che il suo peso eguagli la pression data. Chiamo p l' altezza di questa colonna. Egli è chiaro che quest' altezza p è proporzionale alla pressione, e può servire a rappresentarla. La misura assoluta poi della pressione si avrà dal peso di questa tal colonna di base dk, e d' altezza p, e però sarà $= p\,dk$, quando si esprima per 1 la gravità.

11. *Scolio II.* I più degli Scrittori d' Idraulica prendono a fondamento delle leggi idro-

statiche qualche proprietà de' fluidi conosciuta per esperienza. Pur basta senz' altro quella proprietà che caratterizza i fluidi e li distingue da' solidi; cioè che le loro particelle elementari sono del tutto sciolte e libere, mentre quelle de' solidi sono legate per scambievole coesione.

Per l' equilibrio d' una massa solida non è già necessario che in ogni sua particella elementare le forze attive che la sollecitano si distruggano fra di loro; mentre la resistenza della tenacità impedisce i movimenti che le forze attive tendono a produrre. Ma in una massa fluida non può sussistere l' equilibrio, se non sussiste per ciascheduna delle sue particelle elementari indipendentemente dalle altre; e ciò appunto esprime l' equazione $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$.

Quindi se in una massa solida si avveri l' equazione $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$, questa massa sarà certamente in equilibrio; ma non si può reciprocamente asserire che mancando quell' equazione verrà meno l' equilibrio: laddove ne' fluidi l' equazione anzidetta è condizione necessaria dell' equilibrio. E se una massa fluida trovisi equilibrata, ben potremo conchiudere che divenendo solida in tutto o in parte, conserverà l' equilibrio; ma non potremmo già argomentare al contrario.

CAP. III.

Della superficie di livello.

12. Superficie *di livello* in un fluido equilibrato dicesi quella, nella quale la pressione è nulla o costante. Tale è la superficiè d'un fluido stagnante nel voto, o nell' aria libera che equabilmente la preme.

13. *Proposizione*. L'equazione della superficie di livello, ritenute le denominazioni precedenti, è

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

Perchè ove la pressione sia costante dev' essere $dp = 0$, ed è (7) $dp = q\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$.

14. *Coroll. I.* La superficie di livello è per tutto perpendicolare alla direzione della forza sollecitante.

Questa rimarcabile proprietà della superficie di livello potrebbe dedursi col calcolo dalla sua equazione poc'anzi data, ma più brevemente si raccoglie dal riflettere, che se la forza che sollecita una molecola fluida posta alla superficie fosse obbliqua alla superficie medesima, essa potrebbe risolversi in due, l'una normale, l'altra tangenziale. Quest' ultima non trovando contrasto porterebbe la molecola fluida a sfuggire per la

tangente, onde verrebbe meno il supposto equilibrio.

15. *Coroll. II.* Pe' fluidi gravi, se le direzioni della gravità si riguardano come parallele, la superficie di livello è un piano orizzontale; se poi riguardansi come convergenti al centro della Terra, la superficie di livello è quella d' una sfera concentrica alla Terra stessa.

CAP. IV.

Della Livellazione.

16. Serve la *livellazione* a riferire la posizione di più punti ad una data superficie di livello, assegnando l' elevazione o depressione di ciascuno rispetto di quella superficie.

17. *Livello* è lo strumento che adoprasi per la livellazione; segnasi per esso una visuale orizzontale, o sia perpendicolare alla direzione de' gravi.

18. Tre sono le principali forme di livello. Nel *livello ad acqua* la visuale rade la superficie d' un liquido colorito stagnante in un sifone di cristallo.

Semplice e comodissimo riesce questo strumento; se non che la difficoltà di munir-

lo di mire o di cannocchiale, e l'incertezza della stima ad occhio nudo, oltre varie fisiche ed ottiche illusioni, lo rendon soggetto ad errore, quando non si limitino le battute a brevi distanze.

19. Il *livello a pendolo* è una squadra; un lato si colloca verticale o da se stesso in forza d'un grosso peso che vi si attacca, oppure aggiustandolo a coincidere col filo d'un piombino; così l'altro lato riesce orizzontale, e per esso si traguarda.

L'uso di questo livello è più sicuro, ma non così spedito; e se il filo del piombino è breve, la sua coincidenza col lato della squadra non può accertarsi con tutta precisione.

20. Il *livello a bolla d'aria* è un tubo di vetro pieno d'alcool o d'etere con una bolla d'aria intercetta. Ne' migliori livelli il tubo ha la forma d'un fuso posato sul suo asse, e la sezion longitudinale è formata in arco di cerchio, di cui l'asse viene ad essere la corda. Così quando il centro della bolla trovasi nel punto di mezzo del tubo, l'asse ha la positura orizzontale, e ad esso è parallela la linea di tragnardo.

Questa foggia di livello è comodissima, e suscettibile della maggior precisione; quanto maggiore è il raggio della sezion circolare del tubo, tanto più il livello è sensibile,

ed atto a mostrare qualunque minima inclinazione dell' asse all' orizzonte. Infatti egli è chiaro che il centro della bolla dee sempre trovarsi alla sommità del raggio verticale. Ora se l' asse del tubo s' inclini all' orizzonte d' un angolo i, quel raggio che prima era verticale s' inclinerà anch' esso alla verticale coll' angolo i, e diverrà verticale un altro raggio che fa col primo l' angolo i. Adunque il centro della bolla si scosterà dal segno che prima occupava, per un arco di gradi i. Quanto maggiore sarà il raggio della sezion circolare del tubo, tanto più esteso riuscirà l' arco di gradi i, e tanto più il livello sarà sensibile.

CAP. V.

Pratica della livellazione.

21. PROPOSIZIONE *I.* Livellare un andamento compreso fra due termini A, B.

Si piantino in A, B delle aste verticali fornite di scopi scorrevoli su e giù per esse; e lo stesso si faccia in tanti punti intermedj del proposto andamento, quanti si vorrà, o sarà comodo. Poscia collocato il livello fra le due prime aste, si collimi successivamente a ciascuna di esse, fissando

lo scopo ove batte la visuale, e si noti l'altezza dello scopo sopra il terreno in ciascuna delle due aste. Si faccia lo stesso tra la seconda asta e la terza; e proseguendo così sino all'ultima, sarà compiuta la livellazione.

22. *Scolio*. Se si dovessero livellare ad un tempo più andamenti compresi fra gli stessi termini, si opera allo stesso modo; se non che in ogni stazion di livello si collima a più aste collocate in ciascuno de' proposti andamenti, registrando separatamente le altezze appartenenti a ciascuno.

23. *Proposizione II*. Riconoscere la posizione rispettiva dei punti estremi dell'andamento livellato, o sia trovare l'elevazione del termine *A* sopra il termine *B*.

Compiuta la livellazione come si è detto, si sommino tutte le altezze delle aste notate collimando verso *A*, e così tutte quelle notate collimando verso *B*. Si levi la prima somma dalla seconda; il residuo sarà l'elevazione di *A* sopra *B*.

Portandoci infatti dal punto *A* al punto *B* per la traccia segnata dalle altezze degli scopi e dalle interposte visuali, egli è chiaro che si sale per le altezze notate collimando verso *A*, e si discende per quelle notate collimando verso *B*. Ora l'elevazione di *A* sopra *B* è palesemente eguale all'

eccesso delle discese sopra le salite. Dunque etc.

24. *Scolio*. Alla stessa guisa i punti intermedj possono paragonarsi fra loro, ovvero cogli estremi.

25. *Proposizione III.* Formare il profilo dell'andamento livellato; o sia riferire tutti i termini livellati ad una comune orizzontale.

Dall'altezza dell'asta notata collimando ad uno de' termini levate l'altezza notata collimando al termine seguente. Aggiungendo questa differenza all'elevazione del primo termine sopra la comune orizzontale, avrete l'elevazione del termine seguente sopra la medesima. Così proseguendo di mano in mano a collocare i termini livellati, avrete compiuto il profilo.

26. *Scolio I.* Ove risulti un numero negativo, il termine corrispondente anderà segnato sotto l'orizzontale. E generalmente le depressioni sotto l'orizzontale comune vanno espresse con numeri negativi, le elevazioni con positivi.

27. *Scolio II.* Talora senz'altro strumento torna comodo livellare *a pelo d'acqua stagnante* naturalmente o artificialmente. Questo modo sempre che possa usarsi è il più spedito e il più sicuro d'ogni altro.

CAP. VI.

Rettificazione e correzione del livello.

28. La livellazione è soggetta ad errore 1.° per la *sfericità della Terra*. 2.° per la *rifrazione della luce*. 3.° per *vizio dello strumento*. Questi errori vogliónsi apprezzare e correggere.

29. Linea di *livello vero* è un arco descritto su d'una superficie sferica concentrica alla Terra. Linea di *livello apparente* è tangente a quest'arco, e s' innalza sopra del medesimo.

30. *Proposizione I.* A motivo della sfericità della Terra, la visuale non segna il livello vero, ma l'apparente. L'elevazione del livello apparente sopra del vero è uguale al quadrato della distanza del sito del livello al sito a cui si collima, divisa pel diametro della Terra.

Siano i punti A, B (Fig. 2) sulla linea di livello vero; i punti A, C sulla linea di livello apparente; e sia ABD un cerchio massimo della Terra condotto per A e B. Sarà AC media proporzionale fra BC, e CD; o sia prossimamente AB media proporzionale fra BC, e BD; onde $BC=\frac{AB^2}{BD}$.

31. *Corollario*. Sia a la distanza AB, e D il diametro della Terra. Per ridurre il livello apparente al livello vero, converrà ribassare l'altezza osservata della quantità $\frac{a^2}{D}$. Ed in ciò consiste la correzione della sfericità.

Sia $a = 1000$ metri; essendo $D = 12732395$ metri, la correzione sarà di 0,078 metri.

32. *Proposizione II.* A motivo della rifazion della luce, la visuale non segna neppur giustamente il livello apparente AC, ma s'incurva in Ac, abbassandosi sotto del medesimo. La depressione Cc eguaglia a un di presso la settima parte dell'elevazione del livello apparente sopra del vero.

La curva visuale Ac può riguardarsi come un arco di cerchio che abbia per tangente AC. Onde Cc riesce prossimamente eguale al quadrato della AB diviso pel diametro di questo cerchio. Ma la misura di tal diametro non può aversi direttamente, e convien cercarla dall'osservazione, o piuttosto da un medio fra molte osservazioni, giacchè secondo lo stato dell'aria il raggio della luce or più or meno si piega, ed ora è parte di minor cerchio or di maggiore. Come possano farsi queste osservazioni vedrem tra poco (37). Frattanto diremo che il valor medio di quel diametro trovasi all'incirca settuplo

del diametro terrestre. Quindi

$$Cc = \frac{AB^2}{7BD} = \frac{1}{7}\,BC.$$

33. *Coroll. I.* Perciò la correzione di sfericità dovrà scemarsi d'un settimo in causa della rifrazione. Così per una distanza di mille metri, l'altezza osservata si dovrà ribassare non più (31) di 0,078 ma soltanto di 0,067 metri.

34. *Coroll. II.* La correzion totale complessiva degli errori di sfericità e di rifrazione è $= \frac{6a^2}{7D}$, e varia come il quadrato della distanza.

35. *Proposizione III.* Per vizio dello strumento sbaglierà la livellazione, se la linea di traguardo declini dalla linea di livello apparente, mirando più alto o più basso. Se l'angolo i di declinazione sia piccolo, l'elevazione o la depressione può aversi per eguale alla lunghezza dell'arco di gradi i in un circolo di raggio a.

36. *Scolio I.* Scopresi quest' errore e si rettifica il livello colla *livellazione reciproca*. Se dal punto A (Fig. 3) si traguarda col livello al punto B, poi traguardando da B non s'incontra il punto A, ma un altro punto C, il livello è fallace; e conviene aggiustarlo a modo che il traguardo incontri

il punto *E* che divide per metà l' intervallo *A C*. Poichè essendo egualmente inclinate in senso contrario le due visuali *A B*, *B C*, l' orizzontale dee tagliar per mezzo il loro angolo.

37. *Scolio II.* Praticando la livellazione reciproca senza far uso della correzione relativa alla rifrazion della luce, verrà a rendersi manifesto lo sbaglio che proviene da questa cagione, e la correzione che gli si compete. E così da un gran numero di prove potrà determinarsi il valor medio di questa correzione, che troverassi essere la settima parte di quella di sfericità, come sopra (32) fu detto.

38. *Scolio III.* Se nel livellare un andamento si pone il livello equidistante ai due scopi, nissuna correzione è necessaria. Poichè siccome tutti gli errori sopra notati non dipendono che dalla distanza, così a distanze eguali si commettono errori eguali e nello stesso senso; il che non altera la posizione rispettiva dei termini livellati.

Anche nell' uso del livello ad acqua non occorre alcuna correzione. Poichè da una parte questo livello non abbisogna d' essere rettificato, e d' altra parte gli errori di sfericità e di rifrazione sono insensibili nelle brevi distanze, alle quali (18) dee limitarsi l' uso di questo livello.

CAP. VII.

Dell' equilibrio de' liquidi.

39. PROPOSIZIONE I. Ne' liquidi gravi ed omogenei essendo la densità costante, può farsi $q = 1$, e l'equazione (8) $dp = q\,dz$ darà $p = A + z$. E contando le z dal piano superiore di livello, e supponendo quel piano scevro d'ogni straniera pressione, verrà $p = z$.

40. *Coroll. I.* La pressione del liquido sopra una piccola superficie dk esprimesi (10) per $z\,dk$; ond'eguaglia il peso d'una colonna dello stesso fluido avente per base quella superficie, e per altezza la sua profondità sotto del piano di livello.

41. *Coroll. II.* La pressione del liquido sopra un piano eguaglia il peso d'una colonna avente per base il piano stesso, e per altezza la profondità del suo centro di gravità sotto il piano di livello: e però sia l'area del piano $= k$, e la distanza del suo centro di gravità dal piano di livello $= Z$; sarà $p = kZ$.

Poichè ogni elemento dk del piano sarà premuto (40) con forza $z\,dk$. Queste forze essendo fra loro parallele, la risultante eguaglia la loro somma. Or la somma de'

prodotti $z\,d\,k$ è (I. 50) eguale a $Z\,k$.

42. *Scolio III.* Di quì apparisce come una sottile colonna fluida dilatandosi in ampia falda sopra una base molto estesa possa esercitare un'enorme pressione, di gran lunga superiore al suo peso; e si spiegano i maravigliosi effetti del mantice idrostatico.

43. *Coroll. IV.* Un liquido omogeneo si libra allo stesso livello ne' due rami d'un sifone. Poichè presa una minima base nel fluido, dovendo questa essere premuta egualmente dal fluido d'entrambi i rami, dovrà essere egualmente profonda sotto il livello di ciascheduno; ond'è forza che questo livello sia lo stesso.

44. *Proposizione II.* Ne' liquidi eterogenei, posta la densità $= Z$ funzione nota di z, l'equazione $d\,p = q\,d\,z$ darà la pressione $p = \int Z\,d\,z$.

45. *Coroll. I.* Un liquido eterogeneo non può essere in equilibrio se le sezioni che terminano gli strati di diversa densità non sono orizzontali.

Nè può l'equilibrio essere stabile, se i fluidi più densi non occupano gli strati più bassi. Poichè immaginiamo due strati sovrapposti l'uno all'altro, l'equilibrio de' quali per lieve scossa si turbi. Una delle colonne del fluido s'abbassi, sollevando la colonna vicina, cosicchè nella prima una parte del

liquido superiore penetri nell' inferiore, e nella seconda succeda il contrario. Ora se il fluido superiore è il più rado, la prima colonna dopo essere discesa sarà divenuta più leggera della seconda; quindi prestamente risalirà, e si rimetterà l' equilibrio. Ma se il fluido superiore fosse desso il più denso, la prima colonna dopo essere discesa sarà divenuta più grave della seconda; quindi tenderà a scendere sempre più basso, e sempre più si scomporrà l' equilibrio; il quale non potrà rimettersi sintanto che il fluido più denso non sarà tutto disceso ad occupare l' infimo strato.

46. *Coroll. II.* Siano h, h', h''... le altezze de' successivi strati fluidi cominciando dal supremo livello; q, q', q''.... le loro densità. La pressione in un punto posto nello strato $q^{(m)}$ alla profondità y sotto il livello di quello strato, sarà espressa così

$$p = hq + h'q' + h''q'' \ldots\ldots + y\, q^{(m)}$$

Infatti il valore di Z pel primo strato è q, pel secondo q' etc. ed il valore di $\int Z\, dz$ sarà pel primo strato hq, pel secondo $h'q'$ etc. Onde risulta il proposto valore di p.

47. *Coroll. III.* Equilibrandosi in un sifone due liquidi diversi, le altezze de' loro livelli sopra la sezion comune sono in ragione reciproca delle loro densità.

Sieno queste altezze h, h'; e le densità q, q'. La pressione del primo liquido sopra la sezion comune sarà hq, e quella del secondo $h'q'$. Or queste due pressioni debbon esser uguali. Dunque etc.

CAP. VIII.

Del Centro di pressione.

48. Centro *di pressione* in un piano premuto dal fluido è quel punto del piano stesso per cui passa la risultante di tutte le pressioni esercitate sopra ciascuno de' suoi elementi.

49. *Proposizione*. Sia il piano BAB' (Fig. 4) simmetrico attorno l'asse AP delle x, essendo le ordinate PM ovvero y orizzontali. Prolungato l'asse sino all'incontro del livello del fluido in L, dicasi $AL = h$. Il centro di pressione cadrà in un punto Q dell'asse, e sarà

$$LQ = \frac{\int (h+x)^2\, y\, dx}{\int (h+x)\, y\, dx}.$$

In primo luogo la risultante delle pressioni diffuse sull' area elementare $Mmm'M'$ cade palesemente sull' elemento dell' asse Pp; e così la risultante totale cadrà sull' asse AP.

Poscia inalzata la verticale PR che incontri in R il livello del fluido, la pressione sull'area elementare $Mmm'M'$ esprimesi (41) pel prodotto $Mmm'M'.PR$. Essendo $Mmm'M'$ proporzionale al rettangolo ydx, potrà farsi $= mydx$, e similmente essendo PR proporzionale ad LP, o sia ad $h+x$, potrà farsi $= n(h+x)$. Quindi sarà la pressione elementare $= mn(h+x)ydx$; ed il suo momento rispetto al punto L sarà $= mn(h+x)^2 ydx$; e la somma di questi momenti

$$= mn\int(h+x)^2 ydx.$$

D'altra parte la pression totale esercitata dal fluido sul piano sarà $= mn\int(h+x)ydx$; ed il suo momento sarà

$$= mn.LQ\int(h+x)ydx.$$

Eguagliando ora il momento della pression totale alla somma de' momenti delle pressioni parziali (I. 50), risulterà l'annunciato valore di LQ.

50. *Coroll. I.* Così nel parallelogrammo, supponendo che il livello dell'acqua rada il lembo superiore, si troverà il centro di pressione ai due terzi dell'asse, contati dalla cima; nel triangolo posto colla base all'ingiù, ai tre quarti; nello stesso triangolo capovolto, alla metà.

51. *Coroll. II.* La pressione diffusa su tut-

ti gli elementi del piano si può tutta intendere concentrata e raccolta sul centro di pressione. E sostenuto quel punto da una forza eguale alla risultante o sia alla somma di tutte le pressioni elementari, sarà sostenuto il piano contro la spinta del fluido.

Che se la superficie premuta fosse curva, allora le pressioni elementari non sarebbono parallele fra loro, nè la risultante eguaglierebbe la loro somma. Converrebbe allora ridurle a tre forze parallele a tre assi ortogonali, ed equilibrar queste forze separatamente. Quando però le direzioni di queste tre forze s' incontrassero, potrebbono ridursi a due, o anche ad una sola, che sarebbe in tal caso la risultante.

CAP. IX.

Dell' equilibrio dei fluidi coi corpi immersi.

52. PROPOSIZIONE *I.* La risultante di tutte le pressioni del fluido sulle pareti d' un corpo immerso è uguale ed opposta al peso della massa fluida spostata dal corpo.

In un fluido equilibrato (Fig. 5) fingiamo che una porzione *AQB* di figura qualunque venga a congelarsi. L' equilibrio non verrà tolto (11). Adunque la risultante di tutte

le pressioni del fluido sulle pareti della massa *A Q B* sarà eguale ed opposta al peso d'un pari volume di fluido. Ora le pressioni del fluido contro la massa *A Q B* sono le stesse che contro qualunque altro solido che si ponesse in suo luogo. Dunque la risultante delle pressioni d'un fluido sopra un solido immerso è uguale ed opposta al peso d'un pari volume di fluido, o sia al peso della massa fluida spostata dal solido stesso.

53. *Proposizione II.* La risultante di tutte le pressioni del fluido sulle pareti del vaso che lo contiene equivale al peso del fluido stesso.

In un fluido equilibrato segniamo una porzione di qualunque forma *AQB*. Essendovi equilibrio, la risultante delle pressioni del fluido *A Q B* dovrà essere eguale ed opposta alla risultante delle pressioni di tutto il fluido circostante. Ma questa (52) è uguale ed opposta al peso del fluido *A Q B*. Dunque la prima equivale ad esso peso.

54. *Coroll. I.* Un solido immerso nel fluido perde tanta parte del suo peso, quanto è il peso della massa fluida spostata.

55. *Coroll. II.* Affinchè il corpo s'equilibri nel fluido, due condizioni si ricercano. 1.° Che il peso del corpo sia eguale al peso della massa fluida spostata. 2.° Che i centri di gravità del corpo e del flui-

do spostato cadano nella stessa verticale.

56. *Coroll. III.* Mancando la prima condizione, il corpo avrà moto progressivo in direzion verticale. La forza acceleratrice sarà la differenza del suo peso da quello del fluido cacciato divisa per la massa del corpo stesso. Sin tanto che il corpo resta tutto sott'acqua, questa forza è costante, onde il moto riuscirebbe equabilmente accelerato, se nol turbasse la resistenza del mezzo.

57. *Coroll. IV.* Pesando più il corpo che non fa il fluido rimosso, scenderà al fondo, e lo premerà coll'eccesso del suo peso sopra quello del fluido cacciato. Pesando meno, salirà a galla, e sporgerà di tanto che il peso del fluido cacciato eguagli quello del corpo.

58. *Coroll. V.* Mancando la seconda condizione, il corpo girerà attorno del suo centro di gravità, sintanto che questo centro e quello della massa fluida spostata non cadano nella stessa verticale. Ove poi manchino entrambe le condizioni dell'equilibrio, il corpo avrà insieme moto progressivo e moto rotatorio (I. 278)

CAP. X.

Ricerca delle gravità specifiche de' corpi.

59. Essendo la gravità specifica d'un corpo (I. 56) il rapporto del suo peso assoluto al suo volume, egli è palese che sotto eguali volumi i pesi specifici di due corpi sono fra loro come i pesi assoluti. Quindi se prendasi per unità la gravità specifica dell' acqua distillata, quella d'ogni altro corpo si avrà dividendo il peso assoluto di esso corpo pel peso d'un pari volume d'acqua distillata. Ora ciò posto, l'articolo 54. ne porge un mezzo comodissimo d'esplorare i pesi specifici de' corpi così solidi come fluidi.

60. *Proposizione I.* Esplorare il peso specifico d'un solido.

Si divida il suo peso assoluto per la perdita di peso che soffre pesandolo nell'acqua distillata; il quoziente esprimerà il suo peso specifico.

Poichè siccome quella perdita di peso è (54) uguale al peso d'un volume d'acqua pari al volume del corpo, così noi venghiamo a dividere il peso assoluto del corpo per quello d'un pari volume d'acqua; onde risulta (59) il peso specifico.

61. *Scolio I.* Procedendo a tutto rigore dovrebbe pesarsi il corpo nel vuoto per averne il vero peso assoluto; oppur converrebbe calcolare il peso del volume d'aria occupato dal corpo, ed aggiungerlo a quello del corpo stesso: ma ciò monta a sì poco che può ordinariamente sprezzarsi.

62. *Scolio II.* Se il solido per la sua leggerezza non potesse pesarsi sott'acqua, bisogna unirvi altro corpo di noto peso specifico, e tale che il composto possa immergersi interamente. Dalla perdita di peso che fa il composto si detrarrà la perdita di peso che appartiene al solido aggiunto, e il resto sarà la perdita di peso appartenente al solido proposto. Dividendo per esso il suo peso assoluto, si avrà come prima il peso specifico.

63. *Scolio III.* Generalmente dati i pesi assoluti e specifici di due corpi, può aversi il peso specifico del composto che dalla loro unione risulta. Siano p, p' i pesi assoluti; g, g' i pesi specifici; G il peso specifico del misto. Sarà

$$G = \frac{p + p'}{\frac{p}{g} + \frac{p'}{g'}}.$$

Imperocchè il peso assoluto del misto è $= p + p'$; il suo volume eguale alla somma

de' volumi de' componenti è $= \frac{p}{g} + \frac{p'}{g'}$.
Dunque etc.

64. *Scolio IV.* E più generalmente ancora, delle cinque quantità p, p', g, g', G date quattro, potrà conoscersi la quinta. Di qui la soluzione del problema della corona, celebre per gli studj d'Archimede, e d'altri, belli ed utilissimi problemi.

65. *Proposizione II.* Esplorare il peso specifico d'un fluido.

Uno stesso corpo si pesi prima nel fluido proposto, poi nell'acqua distillata, e si notino le rispettive perdite di peso. Si divida la prima perdita per la seconda, il quoziente ne darà il cercato peso specifico.

Poichè così venghiamo a dividere il peso del fluido proposto per quello d'un pari volume d'acqua distillata, onde etc.

66. *Scolio I.* Più spedito è l'uso dell'*Areometro*. È l'areometro una palla da cui sporge un sottile cilindro con un disco in cima sul quale ponendo varj pesi si fa immergere l'areometro nel fluido a quel segno che si vuole. Si adopera in varj modi. Talora il peso dell'areometro si mantiene costante; ed allora le parti sommerse in diversi fluidi sono in ragione inversa delle loro gravità specifiche. Talora si varia il peso in guisa che l'Areometro si sommerga

sempre sino allo stesso segno; ed allora i varj pesi dell'areometro sono in ragione diretta delle gravità specifiche de' fluidi. Graduato l'areometro secondo questi principj fa conoscere immediatamente il peso specifico del fluido nel quale s'immerge.

67. *Scolio II.* Un metro cubico d'acqua distillata pesa 1000 chilogrammi. Perciò se si prende il metro per unità delle misure lineari, ed il chilogrammo per unità de' pesi, la gravità specifica dell'acqua non dovrà veramente esprimersi per 1 ma per 1000. E similmente tutte le gravità specifiche determinate col metodo sin qui esposto si dovranno tutte moltiplicare per 1000. Allora quel numero che esprime la gravità specifica d'una sostanza, rappresenterà in chilogrammi il peso assoluto del metro cubico di essa sostanza; che è gran vantaggio per la pratica.

CAP. XI.

Dell' equilibrio de' fluidi elastici.

68. PROPOSIZIONE. Ne' fluidi elastici omogenei, e d'uniforme temperatura può farsi (6) $q = m p$ essendo m un coefficiente costante. E l'equazione (8) $d p = q d z$ darà $m z = \log. p$; o sia $p = c^{mz}$.

69. *Coroll. I.* Di quì possiamo conoscere le leggi dell'equilibrio dell'atmosfera, ove si prescinda dalle variazioni che v'inducono la temperatura, e l'umidità. Per tal effetto tornerà più comodo l'intendere le ordinate verticali z dirette dal basso all'alto, onde diverrà $dp = -q\,dz$, o sia $dp = -m\,p\,dz$. Sia P la pressione dell'atmosfera nel punto cui corrisponde $z = o$. Integrando l'equazione, e determinando la costante sicchè $z = o$ dia $p = P$, avremo $m\,z = \log. P - \log. p$; o sia $p = P\,e^{-mz}$.

70. *Scolio I.* La pressione in ciascun punto dell'atmosfera è misurata dall'altezza che ivi segna il barometro. La pression media a livello del mare, ed alla temperatura del ghiaccio è misurata dall'altezza d'una colonna di mercurio lunga metri 0,76.

71. *Coroll. I.* L'elevazione d'un punto dell'atmosfera sopra d'un altro è proporzionale alla differenza de' logaritmi delle altezze barometriche corrispondenti a quei due punti.

72. *Coroll. II.* Crescendo le elevazioni sopra un dato luogo in progressione aritmetica, le densità dell'aria, le pressioni, le altezze barometriche scemano in progressione geometrica.

73. *Coroll. III.* Se la densità dell'aria fosse per tutto uguale, e la temperatura

uniforme di gradi zero, l'altezza dell'atmosfera sopra il livello del mare sarebbe all'altezza barometrica di metri 0,76 nella proporzione della densità del mercurio a quella dell'aria (47); la qual proporzione nella temperatura zero è quella di 10485 : 1 se si prende un medio fra la densità dell'aria perfettamente asciutta, e la densità dell'aria umidissima. Quindi l'altezza dell'atmosfera riuscirebbe di metri 7969.

74. *Coroll. IV.* Se la densità dell'aria fosse per tutto proporzionale alla pressione, l'altezza dell'atmosfera riuscirebbe infinita; perchè nell'equazione $p = P e^{-mz}$ posto $p = 0$, divien z infinito. Ma nelle somme rarefazioni dell'aria (I. 344) la densità segue per avventura altra legge; ond'è ignota la vera altezza dell'atmosfera.

75. *Scolio II.* Le leggi sin quì spiegate non hanno forza se non pei quei tratti dell'atmosfera, ne' quali la temperatura e l'umidità sono presso a poco uniformi. Variando questi elementi, la densità q più non può esprimersi per mp; essa è funzione di p insieme e di z. Se questa funzione fosse cognita o per tutta l'atmosfera, o per qualche tratto della medesima, l'equazione $dp = -q\,dz$ ne farebbe conoscere la pressione e la densità in ciascuna sezione orizzontale di quel tratto.

CAP. XII.

Livellazione barometrica.

76. LEMMA. A livello del mare ed a temperatura di gradi zero, per una salita di metri 10,485 l'altezza del barometro scema d'un millimetro, cosicchè da metri 0,760 riducesi a 0,759.

Poichè a temperatura zero sta la densità del mercurio a quella dell'aria come 10485:1; onde (47) una colonna di mercurio alta metri 0,001 ne equilibra una d'aria alta metri 10,485.

77. *Proposizione I.* Supposta la temperatura dell'atmosfera uniforme di gradi zero, date le altezze contemporanee del barometro in due stazioni, ritrovare l'elevazione dell'una sopra dell'altra.

Cercate i logaritmi delle due altezze barometriche, e moltiplicatene la differenza per 18336; il prodotto darà la ricercata elevazione espressa in metri.

Siano P, p le due altezze barometriche, z l'elevazione cercata. Avremo (71) la proporzione

$$10,485 : z :: \log. 760 - \log. 759 : \log. P - \log. p$$

Quindi $z = \frac{10,485}{0,0005718164} (\log. P - \log. p)$

o sia $z = 18336\,(\log. P - \log. p)$.

Questa regola d'ordinario fallirà, per non essere la temperatura nè uniforme, nè di gradi zero quale si è supposta. Perciò è d' uopo correggerla per conto delle diversità di temperatura che ponno incontrarsi così nell' aria, come nel mercurio.

78. *Proposizione II.* Correggere l'elevazione trovata dall'errore procedente dalla varietà di temperatura nell' aria.

Cercate la temperatura media della colonna aerea frapposta alle due stazioni; per cui potete prendere la media aritmetica fra le temperature osservate nelle due stazioni medesime. Ciò fatto, accrescete l'elevazione trovata di $\frac{1}{268}$ del suo valore tante volte, quanti sono i gradi della temperatura media.

Sia la temperatura media di gradi θ. Poichè l'aria si dilata (6) di $\frac{1}{268}$ per ogni grado di temperatura, quella colonna d' aria che a livello del mare equilibra un millimetro di mercurio, se nella temperatura zero era di metri 10,485, nella temperatura θ sarà di metri 10,485 accresciuti di $\frac{\theta}{268}$ del loro valore. Adunque nella proporzione (77)

il primo termine va accresciuto di $\frac{9}{268}$ del suo valore, onde vien similmente a crescere il valore di z.

79. *Scolio*. La giusta temperatura media della colonna non sempre coinciderà precisamente colla media aritmetica fra le estreme. Di qui ponno provenire alcune anomalie, il rischio delle quali si scema, osservando il termometro in aria libera, ed alto da terra, ed evitando in questa osservazione le prime e l'ultime ore del giorno.

80. *Proposizione III*. Correggere l'elevazione trovata dall'errore procedente dalla varietà di temperatura nel mercurio.

Correggete l'altezza barometrica della stazione più fredda, aumentandola di $\frac{1}{5412}$ del suo valore tante volte, quanti sono i gradi della differenza fra le temperature delle due stazioni.

Poichè siccome il mercurio si dilata (4) di $\frac{1}{5412}$ per ogni grado di temperatura, egli è chiaro che l'altezza barometrica della stazione più fredda viene così a ridursi alla stessa temperatura della più calda; onde si toglie quella differenza d'altezza barometrica che nasce dalla disuguaglianza delle tem-

perature, rimanendo quella sola che proviene dalla diversa elevazione de' luoghi.

81. *Corollario*. La regola della livellazione barometrica colle due correzioni spiegate è compresa nella seguente formola. Siano P, p le altezze barometriche, T, t le temperature osservate nelle due stazioni. L'elevazione della seconda sopra la prima sarà

$$z = 18336 \left(1 + \frac{T+t}{536}\right) \text{Log.} \frac{P}{p\left(1 + \frac{T-t}{5412}\right)}$$

82. *Scolio*. Oltre l'effetto della temperatura si dovrebbe tener conto dell'umidità, per cui la dilatazione per ogni grado di riscaldamento svaria or più or meno dall'adottata misura di $\frac{1}{268}$. Ma qual correzione debba farsi per conto del diverso stato igrometrico dell'aria, non è sino ad ora ben determinato, e questo è forse il principale motivo per cui la livellazione barometrica non può aspirare alla precisione che si ottiene colle misure trigonometriche, o colla livellazione ordinaria. Ad ogni modo essendosi confrontate moltissime altezze livellate col barometro con quelle determinate co' metodi più rigorosi, il divario è sempre riuscito assai tenue, e in confronto della

totale altezza spregevole. Ed altronde non v' ha paragone tra la facilità e speditezza dell' altimetria barometrica con quella della comune altimetria; ond' è che l' uso del barometro per la determinazion delle altezze è da riguardarsi come una delle più belle e delle più utili applicazioni dell' idrostatica.

LIBRO SECONDO

DEL MOTO DE' FLUIDI

SEZIONE PRIMA

Dell' Efflusso dalle luci de' Vasi.

CAP. I.

Teoria generale del moto de' fluidi.

83. PROPOSIZIONE. Riassunta la posizione, e le denominazioni tutte dell' art. 7 sia la particella elementare Zl (Fig. 1) dopo il tempo t animata dalle velocità u, v, w nel senso delle rispettive coordinate x, y, z. Di più dicasi k il volume di essa particella, e supponghiamo che al principio del moto ella avesse volume k', e densità q'. Poste queste cose, le equazioni che determinano il moto della particella elementare e per conseguenza dell' intera massa fluida, sono le due seguenti

$$kq = k'q';$$

$$\frac{dp}{q} = \left(P - \frac{du}{dt}\right) dx + \left(Q - \frac{dv}{dt}\right) dy$$
$$+ \left(R - \frac{dw}{dt}\right) dz .$$

La prima equazione è palese, dovendo la massa della particella elementare rimanersi la stessa e prima e dopo il cangiamento di luogo. Ora al principio del moto ella era $= k'q'$, e scorso il tempo t si esprime per kq. Dunque etc.

Le forze poi che sollecitano l'elemento Zl secondo le coordinate x, y, z sono (7) $(Pq - L)\,dx\,dy\,dz$, $(Qq - M)\,dx\,dy\,dz$, $(Rq - N)\,dx\,dy\,dz$. Dividendo queste forze per la massa dell'elemento, che è $= q\,dx\,dy\,dz$, risulteranno (I. 286) le forze acceleratrici secondo le stesse coordinate $P - \frac{L}{q}$, $Q - \frac{M}{q}$, $R - \frac{N}{q}$. Ora la forza acceleratrice è uguale (I. 184) all'elemento della velocità diviso per l'elemento del tempo. Adunque sarà

$$P - \frac{L}{q} = \frac{du}{dt};\; Q - \frac{M}{q} = \frac{dv}{dt};\; R - \frac{N}{q} = \frac{dw}{dt}.$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per dx, dy, dz e sommandole, si avrà la seconda delle equazioni annunciate.

84. *Scolio I.* L'equazione $kq = k'q'$ dice-

si *Equazione della continuità*. Essa di fatti suppone che la massa fluida serbi continuità nel suo corso, nè mai si separi sciogliendosi in più masse staccate. Ne' fluidi incompressibili essendo la densità costante, vien $k = k'$, cioè la massa elementare, può ben cangiar di figura, ma non di volume, posto sempre che le sue parti debbano rimanersi contigue.

85. *Scolio II.* L'altra equazione dicesi *equazione delle forze sollecitanti*, perchè dalla considerazione di queste forze è dedotta. Un breve confronto di quest' equazione con quella dell' art. 7 relativa all' equilibrio, gioverà a ravvisar con maggiore chiarezza ciò che significano entrambe.

L' equazione dell' art. 7 trae con se queste tre

$$L = Pq \;;\quad M = Qq \;;\quad N = Rq$$

Queste esprimono, che gl' incrementi della pressione nel senso delle coordinate x, y, z sono dovuti alle rispettive forze sollecitanti; o sia che l' intero effetto di queste forze s' adopra, e tutto si esaurisce nel premere. Così appunto accader deve nell' equilibrio; ove le forze sollecitanti non producendo accelerazione veruna, rimangon distrutte, e consumano l' azion loro nel premere.

L' equazione dell' art. 83 dà invece le tre seguenti

$$L=Pq-\frac{qdu}{dt};\ M=Qq-\frac{qdv}{dt};\ N=Rq-\frac{qdw}{dt}$$

E queste ci dicono che gl' incrementi della pressione non son già dovuti alle intere forze sollecitanti, ma bensì ad esse meno quella parte che s' impiega nel produrre l' accelerazione. Così rappresentando Pq la forza sollecitante nel senso delle x, e $\frac{q\,du}{dt}$ la forza impiegata a produrre l' incremento della velocità du, veggiamo che l' incremento della pressione L è rappresentato da $Pq-\frac{q\,du}{dt}$. E così appunto dev' essere: mentre impiegandosi parte della forza nell' accelerare la particella, l' altra parte resta distrutta, e si consuma nel premere.

86. *Scolio III.* È da riflettere circa l' equazione delle forze sollecitanti, che sebbene la pressione p sia funzione delle quattro variabili x, y, z, t siccome quella che dipende e dal luogo in cui trovasi la particella, e dal tempo trascorso dal principio del moto, pure in quest' equazione il differenziale dp non è preso che relativamente alle tre prime variabili x, y, z. Quindi è che anche l' integrale di quell' equazione dee prendersi relativamente alle sole variabili x, y, z, supponendo t costante; e la co-

stante arbitraria che si aggiunge nell' integrare, dovrà essere una funzione arbitraria di t.

87. *Scolio IV.* Le proposte equazioni non ammettono risoluzion generale. L'unica via per trarne profitto si è l'abbandonare la somma generalità, e ristringerci a qualche ipotesi o caso particolare atto a renderne più agevole il maneggio. Fortunatamente avviene che il caso più semplice è appunto quello che più spesso s' incontra nei problemi pratici. I movimenti de' fluidi la cognizione de' quali più c' interessa, si riducono quasi tutti ad un genere di moto che dicesi *lineare*, del qual moto le nostre equazioni ci offrono un pieno scioglimento. Noi dunque ci farem tosto ad esporre la Teoria di questo moto, e poscia l' applicheremo ai casi più ovvj e più importanti per la pratica.

CAP. II.

Teoria del moto lineare de' fluidi.

88. Chiamo *lineare* il moto del fluido, quand' esso segue la traccia d' una data linea per modo che intendendo diviso il fluido per sezioni ad essa normali, tutti i

punti della stessa sezione camminino con velocità prossimamente eguali fra loro, e parallele alla linea *direttrice*.

Rappresenti la Fig. 6 il profilo della corrente fluida, e sia RS una sezione qualunque perpendicolare alla linea direttrice AMB. Si suppone che tutti i punti della sezione RS camminino colla stessa velocità parallelamente ad Mm.

Qui ci limiteremo a considerare il moto dell' acqua, o d' altro qualunque liquido grave, ed omogeneo, supponendone la densità $=1$.

89. *Proposizione I.* In un dato istante del moto, la velocità d'una sezion qualunque è reciprocamente proporzionale all' area della sezione.

Poichè dovendo nello stesso istante passare egual copia d' acqua per ciascuna sezione, il prodotto della sezione per la sua velocità dev' essere quantità costante.

90. *Corollario*. Sia l' area della sezione $RS=y$, e la sua velocità $Mm=u$; sia poi l' area d'un altra sezione $PQ=f$, e la sua velocità $Bb=c$. Sarà $u=\frac{fc}{y}$.

91. *Proposizione II.* Ritenute le denominazioni precedenti, sia g la gravità, p la pressione sulla sezione RS, e sia l' ascissa verticale $AZ=z$. Avremo l' equazione

$$g\,d\,p = g\,d\,z - u\,d\,u.$$

Sia $AM = l$, $Mm = d\,l$, e la Mm declini dalla verticale coll' angolo ϕ. Essendo la densità 1, la massa dello strato elementare $RSsr$ sarà $y\,d\,l$; e il suo peso $g\,y\,d\,l$. Decomponendo questo peso in due forze l'una secondo la direttrice, l'altra perpendicolare alla medesima, sarà la prima $= g\,y\,d\,l \cos.\phi$. Di più la sezione RS è premuta con forza $= g\,y\,p$, e la sezione rs è premuta in senso contrario con forza $= g\,y\,(p + d\,p)$; onde risulta una pressione $= g\,y\,d\,p$ in senso opposto alla direttrice. Quindi la forza sollecitante lo strato $RSsr$ secondo la direttrice Mm sarà $g\,y\,d\,l \cos.\phi - g\,y\,d\,p$. Dividendo questa forza per la massa $y\,d\,l$, si avrà la forza acceleratrice, che uguagliata a $\frac{du}{dt}$ darà l'equazione

$$g\,d\,p = g\,d\,l \cos.\phi - d\,l.\frac{du}{dt}$$

Ma è $d\,l \cos.\phi = d\,z$, e $\frac{dl}{dt} = u$; dunque

$$g\,d\,p = g\,d\,z - u\,d\,u.$$

92. *Scolio I.* Le due equazioni $u = \frac{fc}{y}$; $g\,d\,p = g\,d\,z - u\,d\,u$ corrispondono palesemente alle due dell'art. 83 e potevano anzi dedursi da esse immediatamente; la prima

involve la condizione della continuità del fluido; la seconda è dedotta dalla considerazione delle forze sollecitanti.

Circa la prima equazione è da osservare che la quantità c che esprime la velocità di una data sezione f è una variabile, funzione del tempo t.

La seconda equazione poi deve integrarsi col supporvi t costante, e non altrimenti, per le ragioni stesse di sopra (86) accennate. Quindi è che non possiamo già dedurne, come parrebbe a prima vista, $p=C+z-\frac{u^2}{2g}$; perchè così noi verremmo ad integrare il termine $u\,d\,u$ completamente, laddove deesi integrare soltanto parzialmente, o sia nel supposto di t costante.

93. *Scolio II.* Converrà dunque prima porre nella seconda equazione il valore di u e del $d\,u$ tratto dalla prima; col che diverrà

$$g\,d\,p=g\,d\,z-\frac{f^2\,c\,d\,c}{y^2}+\frac{f^2\,c^2\,d\,y}{y^3}$$

o sia, poichè $\frac{f\,c}{y}=u=\frac{d\,l}{d\,t}=\frac{d\,z}{d\,t\cos.\phi}$,

$$g\,d\,p=g\,d\,z-\frac{f\,d\,c}{d\,t}\cdot\frac{d\,z}{y\cos.\phi}+\frac{f^2\,c^2\,d\,y}{y^3}.$$

Adesso suppongasi t costante, onde c e $\frac{d\,c}{d\,t}$ saranno pure costanti; e s'integri. Verrà

$$p = C + z - \frac{f\,d\,c}{g\,d\,t}\int \frac{d\,z}{y\cos.\varphi} - \frac{f^2 c^2}{2gy^2},$$

ove C sarà (86) una funzione arbitraria del tempo.

Quest'equazione insieme alla precedente $u = \frac{fc}{y}$ fa conoscere la velocità, e la pressione in ogni sezione della corrente; nè altro resta che a determinare le due funzioni arbitrarie del tempo C, c. Questa determinazione non può farsi generalmente, e dee trarsi ne' singoli casi da quelle circostanze del moto che più si ravvisino acconcie a quest' uopo; siccome ben tosto mostreremo.

94. *Scolio III.* Un altra importante considerazione è da farsi circa il valore della pressione che dalle esposte formole si ricava. Noi non abbiamo messa in conto in ogni strato elementare della corrente se non che quella parte di gravità che si esercita nel senso della direttrice, trascurando affatto l'altra parte che si esercita normalmente alla direttrice stessa. Quest' ultima parte infatti non può produrre accelerazione alcuna nè nel senso della direttrice com' è palese, nè perpendicolarmente alla medesima; giacchè in questo senso per ipotesi non v' ha moto, o per lo meno non v' ha accelerazione. E però questa parte di gravità si

rimane totalmente distrutta, ed equilibrata. Ma per ciò stesso ella s' adopera tutta nel premere, ed ogni punto del fluido n' è premuto non altrimenti che se il fluido fosse stagnante, ed animato da questa sola parte di gravità normale alla direttrice.

Quindi per avere il valore esatto e totale della pressione non conviene fermarci al valore di p dato dalle formole precedenti, ma conviene aggiungervi la pression che proviene dalla gravità normale alla direttrice, valutandola come sopra si è detto.

CAP. III.

Degli efflussi in generale.

95. Facendoci ad applicare la Teoria agli efflussi dell' acqua per le luci de' vasi, noi supporremo che per entro i vasi essa fluisca con moto lineare; vedremo appresso come quest' ipotesi sia commendata dalla sperienza. Qui dunque avranno luogo le due equazioni dell' art. 93. Per determinar poi le funzioni C, c la condizione più acconcia che si presenti è il valor della pressione nelle due sezioni estreme del vaso, cioè nel supremo livello, e nella sezion della luce; il qual valore per lo più è cognito.

Supporremo dunque che nella sezione suprema EF sia $p=A$, e nell' infima PQ sia $p=B$; e passeremo a risolvere i due seguenti problemi.

96. *Proposizione I.* Sgorgando l' acqua dalla luce d'un vaso di data figura, mantenuto costantemente pieno per l' afflusso di nuova acqua, si cerca la velocità, e la pressione in ogni sezione del vaso, ed a qualunque istante di tempo.

Sia per la sezione suprema del vaso EF

$$p=A,\ z=h,\ y=m,\ \int\frac{dz}{y\cos.\phi}=M$$

e per la sezione infima PQ

$$p=B,\ z=k,\ y=f,\ \int\frac{dz}{y\cos.\phi}=N$$

Avremo dunque dalla prima equazione (93) queste due

$$(a)\qquad A=C+h-\frac{Mfdc}{gdt}-\frac{f^2c^2}{2gm^2}$$

$$(b)\qquad B=C+k-\frac{Nfdc}{gdt}-\frac{f^2c^2}{2gf^2}$$

onde si trae

$$(E)\ A-B=h-k-(M-N)\frac{fdc}{gdt}-\frac{c^2}{2g}\left(\frac{f^2}{m^2}-1\right)$$

Conoscendosi la figura del vaso, le quantità h, k, M, N, m, f son tutte quantità note e costanti; perciò l' equazione (E)

non ha di variabili fuorche c e t; integrandola dunque, avrassi il valor di c espresso per t. E poscia l'una qualunque delle due equazioni (a) (b) ne darà il valore di C.

Determinate così le due funzioni del tempo C, c, le equazioni (93) mostran subito la velocità e la pressione in ogni luogo e tempo.

97. *Proposizione II.* Determinare il moto dell'acqua per un vaso di data figura, che per l'efflusso si vuoti.

Qui pure abbiamo l'equazione (E); ove le quantità k, f, N sono tuttavia quantità note, e costanti; ma non così le altre tre h, m, M le quali variano a misura che il livello dell'acqua del vaso si va abbassando.

Adunque per poter risolvere l'equazione (E) sia φ' il valore che ottiene l'angolo φ nel punto H, ove $z = h$. Mentre la sezione suprema $EF = m$ s'avanza per lo spazio $Hh = \frac{dh}{\cos. \varphi'}$, la sezione infima $PQ = f$ cui compete la celerità c, s'avanza dello spazio $Bb = c\,dt$. Adunque per l'equazione della continuità dovrà essere $\frac{m\,dh}{\cos. \varphi'} = fc\,dt$. Ponendo in luogo del dt il suo valore $\frac{m\,dh}{fc \cos. \varphi'}$ l'equazione (E) cangerassi nella

$$(F)\ A - B = h - k - (M - N)\frac{f^2 c\,dc \cos.\,\Phi'}{g\,m\,dh} - \frac{c^2}{2g}\left(\frac{f^2}{m^2} - 1\right)$$

Ora Φ', m, ed M sono funzioni note della variabile h, posto che si conosca la figura del vaso; adunque l'equazione (F) non ha di variabili che c ed h. Integrandola avremo c espresso per h; poscia l'equazione $\frac{m\,dh}{\cos.\,\Phi'} = f\,c\,dt$ ne darà c espresso per t. Quindi si procederà come nel Problema precedente.

98. *Scolio I.* Lo sviluppo di queste equazioni, e la loro applicazione a diverse forme e positure di vasi fornirebbe ampia e facil materia al presente Trattato; se non che sarebbe argomento più di curiosità che di vantaggio. Contenti d'avere chiaramente indicata la traccia da seguirsi per la piena determinazione del moto, ci limiteremo ne' seguenti Capitoli a due casi semplicissimi, e bastanti per l'uso pratico. Il primo riguarda i vasi inesausti dopo che il moto è ridotto a *stato permanente* in guisa che la velocità in una data sezione si mantenga costante. Il secondo riguarda i vasi qualunque essi siano, allorquando la luce è

molto angusta in paragone della suprema superficie del fluido.

99. *Scolio II.* Ordinariamente le due sezioni estreme del vaso non son soggette ad altra pressione che a quella dell'atmosfera. Allora si può fare $A = B$, ed il quadrinomio $A - B + k - h$ esprime l'altezza verticale del livello dell'acqua nel vaso sopra il centro della sezion della luce. Noi supporremo questo caso, quando non avvertiremo espressamente in contrario.

Ma potrebbe anche accadere che le suddette sezioni fossero premute da estranea forza oltre quella dell'atmosfera. Generalmente adunque quel quadrinomio esprime l'altezza verticale del vaso, più quell'altezza che rappresenta l'eccesso della pressione che grava la suprema superficie dell'acqua sopra la pressione che grava la superficie infima.

CAP. IV.

Efflusso dai vasi inesausti.

100. PROPOSIZIONE. La velocità permanente dell'efflusso dai vasi inesausti è dovuta all'altezza verticale dell'acqua sopra la luce, divisa per l'unità meno il quadrato

del rapporto tra l'area della luce, e la suprema sezione del fluido.

Sia l'altezza verticale del vaso $= a$; la sezion suprema $= m$; la sezione del foro $= f$; l'altezza dovuta alla velocità $= s$. Sarà

$$s = \frac{a}{1 - \frac{f^2}{m^2}}$$

Supponendosi lo stato permanente, sarà c costante, e $dc = 0$; quindi l'equazione (E) ne dà tosto

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{A - B + k - h}{1 - \frac{f^2}{m^2}}$$

Ma (I. 188) $\frac{c^2}{2g} = s$, ed altronde (99) $A - B + k - h = a$. Dunque etc.

101. *Coroll. I* Se la luce è molto angusta in paragone della sezione suprema (caso il più comune, e che supporremo sempre in appresso) viene $s = a$; e la velocità dell' efflusso è dovuta all' altezza verticale dell' acqua sopra il centro della luce.

102. *Coroll. II.* Le velocità per due luci eguali sotto diverse altezze, sono tra loro come le radici dell' altezza dell' acqua soprastante.

103. *Coroll. III* I getti verticali salgono all' altezza del livello del recipiente; i get-

a obbliqui descrivono una parabola il cui parametro è quadruplo di quell' altezza: salvo l' effetto delle resistenze che l' aria ed altre cagioni oppongono alla vena zampillante.

104. *Coroll. IV.* La *portata*, o sia la quantità Q d' acqua che sgorga dalla luce f nel tempo t sotto l' altezza a, e colla velocità c esprimesi per la formola $Q = fct$. E poichè $c = \sqrt{2ga}$, sarà $Q = ft\sqrt{2ga}$. Per la qual formola date tre fra le quattro quantità a, f, t, Q conosceremo la quarta.

CAP. V.

Efflusso per luci piccolissime.

105. PROPOSIZIONE. La velocità dell' efflusso per luci piccolissime in ciascun istante è dovuta all' altezza verticale dell' acqua sopra la luce.

Poichè trascurando nell' equazione (F) i termini moltiplicati per $\frac{f^2}{m}$, $\frac{f^2}{m^2}$, che per ipotesi sono piccolissimi, viene $\frac{c^2}{2g} = A - B + k - h$; o sia $s = a$.

106. *Coroll. I.* La portata dQ della luce f nell' istante dt, essendo a l' altezza dell'

acqua nel vaso in quell'istante, si ha dall' equazione (104)

$$dQ = f\,dt\sqrt{2ga}.$$

107. *Coroll. II.* La stessa portata dQ può esprimersi in altro modo. Suppongasi che nell'istante dt la superficie dell'acqua EF scenda in ef, percorrendo lo spazio Hh. Sarà dQ eguale al volume d'acqua compreso tra le sezioni EF, ef, o sia $dQ = EF.Hh$. Ora se chiamasi $EF = m$; e la declinazione della Hh dalla verticale $= \phi'$, sarà $Hh = \frac{-da}{\cos.\phi'}$ (ove adoprasi il segno $-$ perchè l'altezza a va scemando) e però

$$dQ = \frac{-m\,da}{\cos.\phi'}$$

108. *Coroll. III.* Dalle due precedenti equazioni hassi la terza

$$dt = \frac{-m\,da}{f\cos.\phi'\sqrt{2ga}}.$$

Conoscendosi la figura del vaso, e l'andamento della direttrice, m, e ϕ' saranno funzioni note di a. Si avrà dunque dall'integrazione delle equazioni precedenti la relazione de' tre elementi t, a, Q, e dato l'un d'essi si determineranno gli altri due.

Sia nota l'altezza dell'acqua nel vaso sul principio dell'efflusso, e questa sia $= h$; la

costanti dell'integrazione si determineranno così che $t=0$ renda $Q=0$, ed $a=h$.

Sia per esempio il vaso prismatico e verticale; sarà m costante, e $\cos.\varphi'=1$. Ed avrassi

$$t=\frac{2m}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{a})\ ;\ Q=m(h-a)$$

$$Q=ft\sqrt{2gh}-\frac{gf^2t^2}{2m}.$$

CAP. VI.

Della pressione sulle pareti de' vasi.

109. PROPOSIZIONE I. In un vaso inesausto, ridotto che sia il moto a stato permanente, si cerca la pressione sulla sezione y corrispondente all' ascissa verticale z.

Sia A la pressione dell' atmosfera, o più generalmente quella che grava la suprema superficie del fluido; e da questa suprema superficie si contino le ascisse z, onde sia $h=0$; e ritenute altronde tutte le denominazioni precedenti, sarà

$$p=A+z-a\,\frac{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}}.$$

Poichè pe' vasi inesausti, essendo $dc=0$,

l'equazione (96) (E) ci dà, come abbiamo veduto,

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{a}{1 - \frac{f^2}{m^2}}$$

E l'equazione (a) ci dà $C = A + \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{f^2}{m^2}$; sostituito il qual valore, si ha (93)

$p = A + z - \frac{c^2}{2g}\left(\frac{f^2}{y^2} - \frac{f^2}{m^2}\right)$. E se in luogo del $\frac{c^2}{2g}$ si ponga il suo valore, si otterrà la formola che abbiamo annunciata.

110. *Proposizione II.* In un vaso qualunque che tramandi acqua per una piccolissima luce, si cerca la pressione sulla sezione y corrispondente all' ascissa verticale z.

Sarà $\quad p = A + z - \frac{af^2}{y^2}$.

Poichè l'equazione (F) dell'art. 97 quì dà $\frac{c^2}{2g} = a$. E l'equazione (a) dà $C = A$, onde (93) $p = A + z - \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{f^2}{y^2} = A + z - \frac{af}{y^2}$.

111. *Coroll. I.* Se la sezione y è molto ampia in confronto della sezione f della luce, rimane $p = A + z$; onde la pressione è rappresentata dall' altezza verticale dell'

acqua sopra la sezione y; appunto come se il fluido stagnasse.

112. *Coroll. II.* Se poi la sezione y è di strettezza paragonabile a quella della luce, è facile il vedere che $\frac{af}{y^2}$ rappresenta l'altezza dovuta alla velocità con cui corre l'acqua per quella sezione: onde la pressione è rappresentata dall'altezza verticale dell'acqua sopra la sezione y, meno l'altezza dovuta alla velocità con cui corre l'acqua per la sezione y. Che è la regola Idraulico-Statica di Daniello Bernoulli.

CAP. VII.

Del Gorgo e della Vena contratta.

113. Svolti i casi più semplici dell'efflusso seguendo l'ipotesi del moto lineare, prima di considerarne qualche altro un po' più complicato, fia bene l'accertarsi se quell'ipotesi regga veramente. Per il che recheremo qui le sperienze e le osservazioni che si son fatte (a) sul movimento dell'acqua

(a) *Bernoulli Hydroyn. pag.* 62.
Bossut Hydrodyn §. 310. *suiv.* Edit. de 1771:
Brunacci. V. Giorn. di Fisica, Tom. I;
Pavia 1808.

nell' interno de' vasi, pendente l' efflusso.

114. *Sperienza I.* Ne' vasi prismatici verticali di stretta luce, se durante l' efflusso vi si gettano de' minuzzoli poco più pesanti dell' acqua, questi si veggono discender tutti verticalmente sino alla distanza dal foro di circa tre raggi del foro stesso; poscia piegano d' ogni parte verso il foro, descrivendo linee curve sensibilmente convesse dalla parte dell' asse del vaso. Così la corrente dell' acqua in vicinanza della luce forma una conoide molto convergente, l' altezza della quale è di tre raggi del foro, la base superiore è la sezione del vaso, la base inferiore è l' area del foro stesso. A questa conoide si dà il nome di *Gorgo*. Rimane stagnante presso gli orli del vaso quel poco d' acqua che attornia codesto gorgo.

Questo concorso di tutte le particelle al foro per un imbuto conoidale comparisce egualmente sia che la luce si apra nel fondo, oppure di fianco nella sponda del vaso.

115. *Sperienza II.* Se sia sovrapposto all' acqua uno strato d' olio, o d' altro liquido colorito più leggero dell' acqua, giunto questo strato all' indicata distanza di tre raggi dal foro, il fluido colorito si fa strada per mezzo dell' acqua per arrivare al foro. Meglio allora e più distintamente si scopre all' occhio la figura del gorgo, molto con-

vergente, e sensibilmente convessa verso l' indentro.

116. *Sperienza III.* Allorchè la luce è aperta in una lastra sottile, la vena del getto si ristringe rapidamente per breve tratto, mantenendo le particelle per quel tratto le direzioni oblique e convergenti colle quali s' affacciarono al foro. Così si forma al di fuori del vaso un altra conoide, che può aversi per una continuazione della precedente. Questa conoide esterna dicesi *Vena contratta*. La sezione infima, o sia la sezione della vena presa nel suo massimo ristringimento, si dice *Sezione della vena contratta*.

117. *Sperienza IV.* La sezione della vena contratta è lontana dal foro poco meno del raggio del foro stesso; la sua ampiezza è un di presso li cinque ottavi dell' ampiezza del foro.

118. *Sperienza V.* Il sito e la misura della contrazione rimane sensibilmente costante, comunque varj o la direzione del getto, o l' altezza del recipiente, o l' ampiezza della luce; sempre che la luce sia molto angusta in confronto dell' ampiezza del vaso.

119. *Coroll. I.* L' accelerazione per cui l' acqua effluente dalla velocità presso che insensibile colla quale discende per entro il vaso passa ad acquistare la velocità

finita dell' efflusso, si compie tutta nello spazio compreso dal gorgo e dalla vena contratta. Per questo spazio, come si ristringono rapidamente le sezioni dell' acqua viva corrente, così rapidamente s' accresce la velocità.

120. *Coroll. II.* Adunque il vaso prismatico dee riguardarsi come terminato da un tubo convergente formato dal gorgo e dalla vena contratta. La precisa forma di questo tubo addizionale è sconosciuta; la sua lunghezza è all' incirca di quattro raggi del foro.

121. *Coroll. III.* Nell' uso della Teoria precedente, in luogo della sezion della luce si dovrà prendere la sezione della vena contratta, e contare per altezza del vaso l' altezza della superficie sopra il centro di questa sezione. Infatti l' azion mutua degli strati acquei, e l' accelerazione che n' è l' effetto, non termina già nella luce, ma procede sino alla sezione della vena contratta; questa dunque dovrà riguardarsi di verità come la sezione infima.

122. *Coroll. IV.* Perciò l' area della luce f dovrà scemarsi nella ragione di $8:5$; o sia in luogo di f dovrà porsi $\frac{5}{8}f$. Onde la formola (104) della portata diverrà

$$Q=\frac{5}{8}ft\sqrt{2ga}.$$

Anche l'altezza a soffrirà alterazione, dovendoglisi aggiungere l'altezza del centro del foro sopra il centro della sezione della vena contratta. Ma l'effetto di questa alterazione ordinariamente è piccolissimo.

123. *Coroll. V.* L'ipotesi del moto lineare ha luogo in tutto il corpo del vaso superiore al gorgo. Ma nel tratto del gorgo e della vena contratta la realtà di quell'ipotesi è tuttavia dubbiosa, e precaria. Perciò l'applicazione della Teoria precedente agli efflussi rimane ancora ipotetica, ed abbisogna del suffragio dell'esperienza.

CAP. VIII.

Sperienze sugli efflussi.

124. Non è guari praticabile lo sperimentare gli efflussi fuor delle vene che sgorgano da luci assai piccole in confronto dell' ampiezza del recipiente. Di queste abbiam detto che la velocità è sempre dovuta all' altezza dell' acqua soprastante. Tante sperienze confermano questa proposizione, che omai può tenersi per indubitata.

125. *Sperienza I.* I getti verticali o qua-

si verticali si sollevano prossimamente all' altezza del livello del recipiente (*a*).

Questa esperienza riesce meglio ne' getti quasi verticali, che non ne' verticali, poichè in questi le gocciole che ricadono, incontrano e ritardano quelle che salgono. Riesce anche meglio ne' getti di poca altezza, che per la velocità minore, e pel cammino più breve patiscon meno dalla resistenza dell' aria.

126. *Sperienza II.* I getti obbliqui descrivono prossimamente una parabola, il di cui parametro è quadruplo dell' altezza del livello del recipiente sopra il centro del foro (*b*). Ciò si riscontra facilmente misurando un ascissa verticale del getto, e la corrispondente ordinata, giacchè il quadrato dell' ordinata diviso per l' ascissa ne dà il parametro.

Anche questa sperienza torna meglio, quando l' altezza dell' acqua sopra la luce è piccola.

127. *Sperienza III.* Misurando la quantità d' acqua che in un determinato tempo sbocca dalla luce; questa corrisponde esattamente alla formola dell' art. 104 se il vaso è inesausto, ed a quelle del Cap. V. se

(a) *Mariotte Mouv. des eaux. Part. IV. Disc. I.*
(b) *Bossut Hydr.* §. 485.

il vaso si va vuotando; purchè però si corregga l' area della luce, come all' art. 122. sostituendovi la sezione della vena contratta.

Qui si richiede che la luce sia scolpita in lastra sottile; se la parete è molto grossa, se gli orli non sono bene affilati, se la luce è munita di doccia o cannello, la sperienza riesce diversamente, siccome vedremo a suo luogo.

128. *Scolio*. Essendo per le due prime sperienze assai certo la velocità dell' efflusso essere dovuta all' altezza dell' acqua soprastante, possiamo valerci di quest' ultima sperienza a definire con maggior precisione il rapporto della sezione della vena contratta alla sezione della luce; il qual rapporto non può aversi esattissimo col misurare il diametro della vena, essendo troppo facile l' errare in questa misura, massime in eccesso.

Sia dunque i il rapporto suddetto; sarà la sezione della vena contratta if, ed avremo $Q = ift\sqrt{2ga}$, onde $i = \frac{Q}{ft\sqrt{2ga}}$.

Quindi conoscendosi per una sperienza la portata d' una data luce in dato tempo e sotto data altezza, avremo da quella sperienza il valore dell' i.

Il Sig. Poleni, l' Ab. Bossut, e Michelotti

padre e figlio hanno assai belle e copiose serie di sperienze di questo genere (a). Lasciando fuori quelle di Poleni che si hanno per alquanto sospette, i valori dell' i che si ricavano dalle altre, coincidono prossimamente. Il più picciolo è $i = 0,597$, il più grande $i = 0,620$; può tenersi per valor medio $i = 0,6$.

Quello di cinque ottavi, o sia di 0,625 adottato da Bossut è certamente soverchio, non essendovi neppur una sperienza che lo porti a tal segno. Con tutto ciò può ritenersi nella pratica a cui non richiedesi tanta sottigliezza.

CAP. IX.

Degli efflussi laterali.

129. Passiamo ora a considerare alcuni casi d' efflusso meno semplici, e tuttavia assai frequenti. Allorchè le profondità de varj punti della luce sotto il livello del re-

---

(a) *Poleni de Castellis* §. 29 *seqq.*
Bossut Hydr. §. 347 *suiv. et* §. 434.
Michelotti Sperimenti Idraulici Tom. I.
Michelotti le fils, Memoires de Turin 1784; 1785. *Part. II.*

cipiente sono notabilmente diseguali, l' efflusso si può intendere a questo modo. Tutti gli elementi della luce ponno riguardarsi come luci d' altrettanti tubi o vasi parziali, tutti terminati nel livello del recipiente. Così ogni elemento della luce tramanda acqua con velocità dovuta all' altezza dell' acqua che gli sovrasta; e la portata della luce è la somma delle portate di ciascun elemento, valutate così.

130. *Altezza media* dell' acqua sopra la luce dicesi quella che se fosse comune a tutti gli elementi della luce darebbe la stessa portata che danno i diversi elementi collocati come sono ad altezze diverse.

131. *Proposizione*. Suppongasi verticale il piano della luce, e simmetrico attorno le ascisse x verticali, essendo le ordinate y orizzontali. Sia f l' area della luce; h l' altezza del pian di livello sopra l' origine delle ascisse, H la cercata altezza media. Sarà

$$Hf^2 = \left\{ \int \left(2y\,dx \sqrt{(h+x)} \right) \right\}^2$$

Prendasi per elemento della luce il picciol rettangolo $2y\,dx$; la sua portata in un tempo dato sarà proporzionale a $2y\,dx\sqrt{(h+x)}$; onde la total portata della luce potrà esprimersi per $\int \left(2y\,dx\sqrt{(h+x)} \right)$. Similmente la portata che si avrebbe dalla lu-

ce f sottò l'altezza comune H è proporzionale ad $f\sqrt{H}$. Quindi l'equazione

$$f\sqrt{H}=\int\left(2y\,dx\sqrt{(h+x)}\right) \text{ onde etc.}$$

132. *Coroll. I.* Sia la luce un trapezio colle due basi orizzontali; sia la semibase superiore $=p$, l'inferiore $=q$; l'asse ovvero altezza $=a$. Sarà $f=a\,(p+q)$, ed $y=p+\frac{q-p}{a}\cdot x$. Introdotti questi valori e compiuta a dovere l'integrazione, si avrà il valore di H.

Se la luce è un parallelogrammo, dovrà farsi $p=q$; se è un triangolo colla punta volta all'insù, si farà $p=0$; se un triangolo colla punta all'ingiù, si farà $q=0$. Per la luce parallelogramma viene l'espressione assai semplice

$$H=\frac{4}{9a^2}\left\{(h+a)^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\right\}^2$$

133. *Coroll. II.* Se il lato superior della luce è a fior d'acqua, si farà $h=0$; ed allora il valore di H per la luce trapezia diventa

$$H=\frac{16a}{225}\cdot\frac{(2p+3q)^2}{(p+q)^2}.$$

134. *Coroll. III.* Quindi pel parallelogrammo si ha

$$H=\frac{4a}{9}=0{,}444\,a$$

pel triangolo colla punta volta in sù

$$H = \frac{16a}{25} = 0,640\,a$$

per lo stesso triangolo capovolto

$$H = \frac{64a}{225} = 0,284\,a$$

135. *Scolio*. Per poco che siavi di battente, l'altezza media differisce così poco dall'altezza dell'acqua sopra il centro di gravità della luce, che nella pratica può starsi a quest' ultima senza impegnarci in altri calcoli.

CAP. X.

Degli stramazzi, o scaricatori a fior d'acqua.

136. PROPOSIZIONE. La portata Q d'un emissario rettangolare a fior d'acqua, del quale sia l'altezza a, la larghezza b, si ha dalla formola

$$Q = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}\, a\, b\, t \sqrt{2ga}$$

Poichè l'altezza media è $(134) = \frac{4a}{9}$; e la velocità media $= \sqrt{2g \cdot \frac{4a}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2ga}$.

L'area poi della luce $a b$ per la contrazione riducesi a $\frac{5}{8} a b$. Quindi la formola generale della portata (104) $Q = f c t$ diviene quella che abbiamo annunciata.

137. *Coroll. I.* Paragonando fra loro le portate dello stesso scaricatore sotto diverse altezze d'acqua, i quadrati delle portate sono fra loro come i cubi delle altezze.

138. *Coroll. II.* Se inferiormente alla luce dell'emissario l'acqua ristagna in altezza costante sopra la soglia dell'emissario stesso, divido l'altezza a in due parti; chiamo h l'altezza libera, e k la rimanente altezza soggetta al rigurgito. E la portata sarà

$$Q = \frac{5}{8} b t \left(\frac{2}{3} h + k \right) \sqrt{2 g h}$$

Poichè pel tratto libero h la velocità dell'efflusso è dovuta all'altezza media $\frac{4h}{9}$; pel tratto rimanente k è dovuta (99) all'altezza h. Quindi etc.

139. *Scolio.* La dottrina degli efflussi laterali e la di lei applicazione alle luci aperte a fior d'acqua può veramente parere alquanto ipotetica, nè potremmo pienamente affidarvici, se non fosse confermata dalla spe-

rienza. Ora molte sperienze (*a*) abbiam di Poleni sullo scarico degli emissarj a fior d'acqua, sia liberi, sia soggetti a parziale ringorgo: ovvero sul *moto semplice*, com'egli lo chiama, e sul *moto misto* dell'acqua. Tutte s'accordano assai bene colle formole degli art. 136. 138, alle quali pure maravigliosamente consentono le più recenti sperienze del sig. du Buat (*b*).

C A P. XI.

Dell' afflusso dell' acqua ne' vasi inesausti.

140. Ne' vasi che per afflusso perenne si mantengono pieni, abbiam supposto tacitamente che l'acqua la quale affluisce alla superficie vi abbia precisamente quello stesso grado di velocità colla quale la superficie stessa discende in grazia dell' efflusso: nel qual caso è palese che l'acqua affluente non esercita veruna azione sulla massa dell' acqua sottoposta. Che se l'acqua s'affonda con velocità maggiore, essa perderà ad un tratto notabil grado di moto, e quindi eser-

(a) *Poleni de Motu aquæ mixto Lib. I.* §. 43. *seqq.*

(b) *Buat Principes d'hydraulique*. §. 410.

citerà una nuova pressione sulla superficie, la qual pressione concorrerà ad accelerare l' efflusso. Seguirà il contrario nel caso opposto.

141. *Proposizione*. Sia k il rapporto della velocità dell' acqua affluente a quella della superficie; l' altezza dovuta alla velocità permanente dell' efflusso sarà

$$s = \frac{a}{1 - \frac{f^2}{m^2}(2k - 1)}$$

Essendo la velocità della superficie $\frac{fc}{m}$, sarà la velocità dell' afflusso $\frac{kfc}{m}$. Quindi la velocità estinta sarà $(k-1)\frac{fc}{m}$; e la forza perduta dalla falda $m\,dl$ che nel tempo dt sottentra alla superficie è $(k-1)\frac{fc}{m} \cdot \frac{m\,dl}{dt}$ o sia poichè $\frac{dl}{dt} = \frac{fc}{m}$, sarà $(k-1)\frac{f^2c^2}{m^2} \cdot m$. Di qui risulta una pressione addizionale sulla superficie, la qual pressione eguaglia il peso d' una colonna d' acqua avente per base la stessa superficie m, e per altezza $(k-1)\frac{f^2c^2}{m^2}$. Perciò nelle equazioni dell' ar-

ticolo 96. in luogo di A converrà porre $A + (k-1)\frac{f^2 c^2}{m^2}$. Fatto questo cangiamento, invece di ottenersi pel valore di s l'espressione dell' art. 100. si otterrà l' espressione quì sopra annunciata.

142. *Coroll. I.* Se l' acqua affluisce lateralmente senza alcuna velocità nel senso della direttrice, dovremo fare $k=0$, e verrà

$$s = \frac{a}{1+\frac{f^2}{m^2}}$$

143. *Coroll. II.* Un cangiamento analogo subisce la formola dell' art. 109. che rappresenta la pressione in una sezion qualunque y rispondente all' altezza verticale z: il cangiamento consiste in ciò che la frazione $\frac{1}{m^2}$ tanto nel numeratore quanto nel denominatore vien moltiplicata pel binomio $2k-1$.

E così pel caso dell' afflusso laterale hassi

$$p = A + z - a\,\frac{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{f^2}+\frac{1}{m^2}}.$$

144. *Scolio I.* La velocità dell' efflusso non corrisponderà precisamente all' altezza quì sopra (141) determinata, se l' acqua affluente non si spanda uniformemente su tutta la

superficie con eguale velocità. Se ella vi cade sopra a modo di getto, urtando una sola parte della superficie, la velocità non rimane estinta tutta ad un tratto: parte se ne conserva, e va a produrre movimenti irregolari e vorticosi nel fluido sottoposto, nè contribuisce ad accelerare l' efflusso. Quanta parte della velocità vada così distratta nel produrre siffatti movimenti, qual ne sia la natura e l' effetto in ordine ad alterare l' efflusso, non sembra potersi determinare per la teoria; la sola sperienza potrebbe istruircene.

145. *Scolio II.* L' effetto dell' afflusso può quasi sempre trascurarsi nella pratica, quando si tratti di vasi *semplici*. Ordinariamente il foro è piccolissimo, nè molto grande il rapporto tra la velocità dell' afflusso e quella della superficie; cosicchè la velocità dello sbocco è sensibilmente dovuta all' altezza del recipiente. Non così ne' vasi *composti* o *discontinui* de' quali passeremo ora a parlare.

CAP. XII.

De' vasi discontinui.

146. *Vasi discontinui* chiamo quelli, ne' quali l' ampiezza delle sezioni cangia per

salto, cosicchè la linea che forma il profilo del vaso è discontinua. Tali sono i vasi interrotti da diafragmi. Le porzioni chiuse fra due vicini diafragmi costituiscono altrettanti recipienti, o tronchi, ciascheduno de' quali considerato separatamente è un vaso continuo.

147. *Proposizione*. Sia un vaso discontinuo di tre tronchi; siano a, b, c le altezze verticali di questi tronchi, cominciando dal superiore; m, n, q le ampiezze delle loro superficie; f, g, e le ampiezze delle luci rispettive. Essendo il vaso mantenuto costantemente pieno, l'altezza s dovuta alla velocità dell'efflusso per l'ultima luce e sarà

$$s = \frac{a+b+c}{e^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2}}$$

Siccome le velocità sono reciprocamente proporzionali alle sezioni (89) e però le altezze dovute alle velocità sono reciprocamente proporzionali ai quadrati delle sezioni, così le altezze dovute alle velocità pei tre fori f, g, e saranno rispettivamente $\frac{e^2 s}{f^2}$, $\frac{e^2 s}{g^2}$, ed s ovvero $\frac{e^2 s}{e^2}$.

Ciò posto dicasi H la pressione nella sezione del foro f, e K la pressione nella sezione del foro g. E sarà (100)

$$\frac{e^2 s}{f^2}=\frac{A-H+a}{1-\frac{f^2}{m^2}};\ \frac{e^2 s}{g^2}=\frac{H-K+b}{1-\frac{g^2}{n^2}}$$

$$\frac{e^2 s}{c^2}=\frac{K-B+c}{1-\frac{c^2}{q^2}}$$

o sia

$$A-H+a=e^2 s\left(\frac{1}{f^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

$$H-K+b=e^2 s\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$K-B+c=e^2 s\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

Sommando queste tre equazioni, e supponendo al solito che sia $A=B$, avrassi l'esposto valore di s.

148. *Coroll. I.* Se le luci f, g, e sono piccolissime in confronto delle ampiezze superficiali m, n, q, viene

$$s=\frac{a+b+c}{1+\frac{e^2}{g^2}+\frac{e^2}{f^2}}$$

E se l'ultima luce e sia piccolissima anche in confronto delle altre f, g; l'acqua esce con velocità dovuta all'intera altezza verticale $a+b+c$.

149. *Coroll. II.* L'intervallo fra un diaframma e l'altro non influisce punto sulla

velocità dell' efflusso; questa dipende soltanto dalla totale altezza del vaso composto, e dal rapporto tra le ampiezze de' fori e quelle de' recipienti.

150. *Coroll. III.* Le pressioni H, K etc. sulle sezioni di comunicazione fra un tronco e l' altro sono espresse così

$$H = A + a - c^2 s \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$K = A + a + b - c^2 s \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

ed in generale la pressione L sulla superficie d' un tronco qualunque sarà

$$L = A + a + b \ldots - c^2 s \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} \ldots \right)$$

estendendo la serie ai termini relativi a tutti i tronchi superiori al proposto. Potrà poi in queste espressioni porsi in luogo di s il suo valore già determinato.

151. *Coroll. IV.* Se poi cercasi la pressione in una sezion qualunque y, questa si avrà come segue. Sia x l' ampiezza della superficie del recipiente o tronco al quale appartiene la sezione y, e sia z la distanza verticale di questa sezione dalla superficie x. Fatto per brevità

$$\frac{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} \ldots + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{q^2}} = M$$

sarà

$$p = A + a + b \ldots . + z - (a + b \ldots \ldots + c)\, M$$

Sia L la pressione sulla superficie del tronco al quale appartiene la sezione y, e sia t la luce di questo tronco; sarà la velocità dell' efflusso per t dovuta all' altezza $\frac{e^2 s}{t^2}$.

Potendosi ora questo tronco riguardare come un sol vaso continuo, si avrà (109)

$$p = L + z - \frac{e^2 s}{t^2}\left(\frac{t^2}{y^2} - \frac{t^2}{x^2}\right), \text{ o sia}$$

$$p = L + z - e^2 s \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Ponendo ora in luogo di L e di s i loro valori di sopra determinati (150 . 147) avremo l' annunciata espressione di p.

152. *Scolio I.* In ciascheduno de' recipienti, toltone il più alto, l' acqua affluisce con velocità necessariamente maggiore di quella colla quale discende la sua superficie. Di qui una pressione addizionale, che accelera l' efflusso. Volendone tener conto, si osservi che il rapporto della velocità dell' acqua affluente nel secondo recipiente alla velocità della superficie di questo è $= \frac{n}{f}$; e così pel diafragma seguente è $= \frac{q}{g}$ etc.

153. *Scolio II.* Quindi seguendo la scorta del Capo precedente si troverà che i valori di s e p trovati di sopra (147. 151) debbono cangiarsi così. In luogo del binomio $\frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2}$ dovrà scriversi $\frac{1}{g^2} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n}{f} - 1\right)$, e cangiar similmente tutti i binomj susseguenti.

154. *Scolio III.* Per altro è da avvertire che siccome l'urto dell'acqua affluente non preme equabilmente tutta la superficie, ma colpisce direttamente la sola parte sottoposta al foro, così (144) l'accelerazione calcolata qui sopra non può aver luogo nella sua totalità. Sin tanto che la sperienza non ne abbia insegnato quanta parte della pressione che nasce dall'afflusso vada a perdersi nel produrre i movimenti irregolari e vorticosi che da essa nascono, secondo le diverse proporzioni tra la sezione dell'acqua affluente, e quella del vaso, e secondo i varj rapporti delle velocità, null'altro si può accertare, se non che i valori di s e di p saranno compresi entro i limiti delle due formole esposte agli art. 147. 151, e delle stesse formole cangiate come fu prescritto all'art. 153.

SEZIONE SECONDA

Del Moto dell' acqua pei Tubi.

CAP. XIII.

Del Moto pei Tubi in generale.

155. Supporremo che il Tubo riceva perenne alimento da un recipiente, alla luce del quale sia congiunta l' origine o sia l' imboccatura del tubo. E supporremo codesto recipiente mantenuto costantemente pieno, e d' ampiezza assai grande rispetto dell' ampiezza del tubo. Allora il sistema formato dal recipiente e dal tubo può riguardarsi come un solo vaso, pel quale corra il fluido con moto lineare. Ad esso perciò saranno applicabili le proposizioni della Sezione precedente, salvo l' effetto delle resistenze, delle quali avremo ragione in appresso.

156. Può questo sistema esser *continuo* o *discontinuo*. Sarà *continuo*, quando nè il recipiente nè il tubo non siano interrotti da diafragmi; e se di più l' imboccatura del tubo sia conformata in guisa che secondi il naturale andamento della vena contratta.

157. Sarà poi *discontinuo*, allor quando

sia tale o il recipiente o il tubo; ovvero se l'imboccatura del tubo sia cilindrica o d'altra forma che non segua l'andamento della vena contratta.

158. Per ben comprendere come quest'ultimo caso si riferisca a' vasi discontinui, si rifletta che le particelle dell'acqua s'affacciano all'emissario del recipiente con direzioni oblique e convergenti. Or quest'obbliquità e questa convergenza non può a meno che non si mantenga per qualche tratto per entro il tubo. Poichè l'acqua che riempie il tubo corre con velocità pochissimo diversa da quella colla quale le particelle si presentano alla sua bocca, onde non può essa deviarle sensibilmente dalle loro naturali direzioni. Dovrà dunque formarsi all'ingresso del tubo una contrazione, l'effetto della quale è in tutto analogo a quello d'un diaframma che ristringa la sezione del tubo in vicinanza della sua origine.

Una sperienza del sig. Venturi (*a*) ne porge una sensibil conferma. All'origine d'un tubo cilindrico egli appose un diaframma, che ne ristringeva la sezione nella proporzione all'incirca di 8 : 5; ed osservò quant'acqua uscisse in un dato tempo. Le-

(a) *Recherches sur la communication latérale du mouvement dans les fluides. Exp. III.*

vò indi quella strozzatura; ed ebbe in pari tempo pari quantità d'acqua. Formasi dunque all' ingresso de' tubi cilindrici una contrazione, la quale fa l' effetto d'un diafragma che ristringa l' area del tubo nella ragione di 8 : 5 o più tosto (128) di 1 : 0,6; che è il rapporto dell' area della luce alla sezione della vena contratta.

C A P. XIV.

Leggi del moto pe' tubi continui.

159. PROPOSIZIONE I. La velocità colla quale l' acqua sbocca dal tubo è dovuta all' altezza del livello del recipiente sopra il centro della bocca del tubo.

Risulta dall' art. 105.

160. *Proposizione II.* La pressione in una sezion qualunque del tubo è rappresentata dall' altezza dell' acqua imminente, meno l' altezza dovuta alla velocità di quella sezione. Al che s' intende doversi aggiungere la pression costante dell' atmosfera.

Risulta dall' art. 112.

161. *Coroll. I.* Sia a l' altezza verticale del vaso, b quella del tubo; m l' ampiezza dell' origine del tubo, f quella del suo sbocco. Sia di più y la sezione di cui si cerca

la pressione, ed x la sua distanza verticale dall' origine del tubo. Sarà

$$p = A + a + z - (a + b) \frac{f^2}{y^2}.$$

Può la pressione divenir negativa, può rimaner positiva bensì ma minore della pressione atmosferica A. Giova esaminar distintamente questi due casi, così pei tubi cilindrici, come pei conici convergenti, o divergenti.

162. *Coroll. II.* Se tale è la struttura del tubo che la pressione divenga in alcun luogo negativa, ivi le particelle fluide abbandonano le pareti del tubo, e cessa d'aver luogo la supposta continuità.

163. *Coroll. III.* Acciocchè la pressione non divenga negativa all' origine del tubo, dev' essere

$$a + b < (A + a) \frac{m^2}{f^2}.$$

164. *Coroll. IV.* Quindi se il tubo è cilindrico, la sua altezza verticale non può eccedere metri 10,4 senza che la vena fluida si rompa. Un tubo convergente comporta altezza maggiore; un tubo divergente non può arrivare a quell' altezza.

165. *Coroll. V.* Se il tubo giace coll' asse orizzontale, sarà $b = 0$. Allora s' egli è cilindrico o convergente, potrà stendersi a

qualunque lunghezza; ma se è divergente, dovrà essere

$$\frac{m^2}{f^2} > \frac{a}{A+a}$$

166. *Coroll. VI.* Se tale è la struttura del tubo, che la pressione rimanga bensì positiva, ma divenga in qualche luogo minore di A, allora se aprasi in quel luogo delle pareti un piccol pertugio, non solamente non ne uscirà stilla d'acqua, ma anzi l'aria esterna s'introdurrà nel tubo, e si frammischierà al getto, rompendone la continuità.

167. *Coroll. VII.* Di qui move il fenomeno disegnato dal sig. Venturi col nome di *comunicazione laterale del moto*. Esso consiste nella proprietà che ha un getto fluido di attrarre, e di strascinar dietro se le vicine particelle dell' aria, o dell' acqua. Quando e perchè abbia luogo questo fenomeno per le cose precedenti è manifesto.

168. *Coroll. VIII.* Affinchè nell'origine del tubo non divenga $p < A$, dovrà essere

$$a + b < \frac{a\,m^2}{f^2}.$$

169. *Coroll. IX.* Quindi nell' imboccatura de' tubi cilindrici inclinati a basso, la pressione divien sempre minore della pressione atmosferica. Molto più ne' divergenti. Ne' convergenti non sempre.

170. *Coroll. X.* Se il tubo è orizzontale, sarà $b = o$. Ed allora se è cilindrico, sarà la pressione sulle pareti per tutto uguale alla pressione atmosferica; se è convergente, maggiore; se divergente, minore.

C A P. XV.

Leggi del moto pe' tubi discontinui.

171. P*roposizione I.* Sia il tubo interrotto da un diaframma che ristringa una delle sue sezioni m nella ragione di $1 : i$; la velocità dell'efflusso per la bocca f sarà dovuta all'altezza

$$s = \frac{a + b}{1 + \frac{f^2}{m^2}\left(\frac{1}{i} - 1\right)^2}$$

Poichè dicasi M la superficie amplissima del recipiente. Considerando tutto il sistema siccome diviso in due tronchi dal diaframma, saranno le superficie di questi tronchi M, m; e le rispettive loro luci im, f; e la somma delle altezze verticali $a + b$. Onde si avrà (153)

$$s = \frac{a+b}{f^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{i^2 m^2} - \frac{1}{M^2} + \frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2}\left(\frac{2m}{im} - 1\right)}$$

La quale espressione, trascurando il termi-

ne piccolissimo $\frac{1}{M^{\cdot}}$ si riduce a quella che abbiamo proposta.

172. *Coroll. I.* E se fosse un altra sezione n che da un altra strozzatura venisse ristretta nella ragione $1:k$; ed un altra q ristretta nella ragione $1:h$ etc. si avrebbe similmente

$$s = \frac{a+b}{1+\frac{f^{\cdot}}{m^{\cdot}}\left(\frac{1}{i}-1\right)^2+\frac{f^{\cdot}}{n^{\cdot}}\left(\frac{1}{k}-1\right)^2+\frac{f^{\cdot}}{q^{\cdot}}\left(\frac{1}{h}-1\right)^2}$$

173. *Coroll. II.* È indifferente per la velocità dello sbocco il sito di codeste strozzature, e l'intervallo fra l'una e l'altra. Come pure riesce allo stesso o la strozzatura stringa un cerchio solo del tubo, o si prolunghi per qualche tratto.

174. *Coroll. III.* Vale la stessa formola e segue lo stesso effetto, se il tubo in vece di strozzature sia affetto di protuberanze o varici che dilatino le sezioni nella ragione di $1:i$, di $1:k$ etc. Di qui s'intende, e si misura il discapito che le varici arrecano alla velocità.

175. *Scolio.* Tutte le formole di questo e del precedente Capo suppongono che la superficie del recipiente e la bocca del tubo siano gravate di pressioni eguali. Che se soffrissero pressioni disuguali A, B; in luo-

go di $a+b$ dovrà porsi (99) $A-B+a+b$. Così se lo sbocco del tubo non sia libero, ma sepolto sotto l' acqua stagnante a un determinato livello, in luogo di $a+b$ dovrà porsi l' altezza del livello del recipiente onde il tubo riceve l'acqua, sopra il livello del recipiente in cui sbocca.

CAP. XVI.

Efflusso pei tubi addizionali.

176. Spesse volte dalle luci de' vasi si trae l' acqua per mezzo di tubetti o cannelli cilindrici, o conici, o d' altra forma. Quale alterazione codesti tubi addizionali producano nella velocità e nella portata delle luci, importa molto il conoscere.

Se la luce alla quale esteriormente s' adatta il tubo, sia interiormente cavata entro la parete del vaso a foggia d' imbuto che secondi la contrazione della vena, il sistema del vaso e del tubo addizionale sarà continuo; altrimenti, sarà discontinuo. E l'origine del tubo potrà (158) riguardarsi come ingombra d' un diafragma che la ristringa nella ragione di 1 : 0,6. Consideriamo partitamente i due casi.

177. *Proposizione I.* Allorchè l' imbocco

del tubo segue l'andamento della contrazione, l'altezza dovuta alla velocità dell'efflusso è uguale all'altezza del livello del recipiente sopra lo sbocco del tubo. O sia

$$s = a + b.$$

Risulta dall'art. 159.

178. *Proposizione II.* Allorchè l'imbocco del tubo non segue l'andamento della contrazione, l'altezza dovuta alla velocità dell'efflusso si ha prossimamente dalla formola

$$s = \frac{a + b}{1 + \frac{4f^2}{9m^2}}.$$

Poichè per le cose di sopra dette (176) il valore di s dee risultare dalla formola dell'art. 171, facendovi (128) $i = 0, 6$. E risulta appunto quale lo abbiam proposto.

179. *Corollario.* Se il tubo è cilindrico, riesce $s = \frac{9}{13}(a + b)$; o sia prossimamente $s = \frac{2}{3}(a + b)$. Onde la velocità non è più dovuta all'intera altezza dell'acqua sopra lo sbocco, ma soltanto ai due terzi di quell'altezza.

180. *Scolio.* Queste formole non si danno per rigorose ma soltanto per prossime 1.° perchè la quantità della contrazione non è fissata (128) con tutta precisione. 2.° perchè

non è ben certo se il ristringimento che soffre la vena all'ingresso del tubo sia precisamente eguale a quello che soffre negli sbocchi liberi. 3.° per l'incertezza che tuttavia rimane (154) nel calcolare l'effetto dell'afflusso. Pure da tutto ciò non ponno nascere che piccolissime aberrazioni, che potrebbon anche compensarsi a vicenda. In fatti l'esperienza corrisponde benissimo alla Teoria.

181. *Sperienza*. Sotto una costante altezza del recipiente sgorghi l'acqua da una luce armata di breve tubo cilindrico. Si misuri la portata che si ottiene in un dato tempo, e dividendo questa portata per la sezione del tubo, e pel tempo dell'efflusso si avrà (104) la velocità dell'efflusso. Or questa si troverà costantemente dovuta ai due terzi dell'altezza del recipiente.

182. *Scolio*. Così sperimentò prima d'ogni altro il Ch. sig. Poleni (*a*). Poi Michelotti e Bossut ripeterono in mille guise e con migliore apparato la sua sperienza. Ma sebbene queste prove ponessero fuor di dubbio la diminuzione della velocità dell'efflusso prodotta da' tubi addizionali, e ne accer-

---

(a) *Poleni de Castellis* §. 24. *seqq.*
Bossut Hydr. §. 379. *suiv.* §. 406. *suiv.*
Michelotti l. c.

tassero la precisa misura, rimaneva tuttavia oscura la spiegazione del fenomeno. Ora dalle cose precedenti parmi essa assai chiaramente stabilita, e derivata dalla Teoria generale.

Sarebbe bene poter confrontare la formola dell' art. 178 con esperimenti fatti su doccie coniche convergenti, o divergenti. Ma poche sperienze abbiamo di questo genere, e non troppo precise. Pur queste poche (a) non lasciano di corrispondere assai bene alla formola.

CAP. XVII.

Della portata de' tubi addizionali; e della forma più vantaggiosa degli emissarj.

183. Conosciuta la velocità dell' efflusso dal tubo addizionale, basta moltiplicarla per la luce del tubo per ottenerne la portata. Nel procedere a questa ricerca, distingueremo gli stessi due casi del Capo precedente.

184. *Proposizione I.* La portata d' un tubo adattato ad una luce cavata interiormente a foggia della vena contratta, si ha dal-

(a) *V. Società Italiana Tom. XII.*

la formola

$$Q = f t \sqrt{2g \cdot (a+b)}$$

Paragonando questa portata con quella della nuda luce che è $= m t \sqrt{2 g a}$, si vedrà quai tubi accrescano, e quali scemin l'efflusso.

185. *Coroll. I.* Se il tubo è orizzontale, sta la portata della nuda luce a quella del tubo :: $m : f$. Laonde un tubo conico divergente aumenta l'efflusso: un tubo cilindrico non l'altera: un tubo convergente lo scema.

186. *Coroll. II.* Quanto più si dilata la bocca del tubo divergente, tanto più d'acqua si trae. Non può per altro dilatarsi tanto che $\frac{f^2}{m^2}$ divenga maggiore di $\frac{A+a}{a+b}$; altrimenti (163) la pressione si fa negativa, e l'acqua più non segue le pareti del tubo.

187. *Proposizione II.* La portata d'un tubo adattato ad una luce scolpita in lastra sottile è

$$Q = f t \sqrt{\frac{2g(a+b)}{1 + \frac{4f^2}{9m^2}}}.$$

Paragonando questa portata con quella della nuda luce che è $= \frac{5}{8} m t \sqrt{2 g a}$, potrà in ciaschedun caso conoscersi se il tubo ad-

dizionale avvantaggi o no la portata. Ristringiamoci a' tubi orizzontali.

188. *Coroll. I.* Un tubo conico così convergente che sia f : m :: $1 : \sqrt{2}$ dà prossimamente la stessa portata che darebbe la nuda luce, tolto via il tubo. Se il tubo converge anche più, si ha minor portata: se converge meno, maggiore.

189. *Coroll. II.* Un tubo cilindrico accresce la portata della luce in ragione all' incirca di 10 : 13. E le portate della stessa luce 1.° scolpita in lastra sottile 2.° munita di tubo cilindrico 3.° cavata interiormente a seconda della vena contratta, sono tra loro come i numeri 10, 13, e 16.

190. *Coroll. III.* Un tubo conico divergente accresce ancor di più l' erogazione. Se diverge così che sia $f : m :: \sqrt{2} : 1$ la portata diventa quasi eguale a quella che si trarrebbe dalla luce formata ad imbuto a seconda della contrazione. Ma può ottenersi copia d' acqua maggiore dilatando la bocca del tubo ancor di più, e sino al limite nel quale la pressione si farebbe negativa.

191. *Coroll. IV.* Di qui si vede come le doccie orizzontali cilindriche o divergenti adattate ad una luce aperta in lastra sottile, quantunque scemino la velocità dell' efflusso, pure ne aumentano la quantità. Il

getto uscente dal cannello si porta a minore distanza, ma è più pieno di quello che spiccia dalla semplice luce.

192. *Scolio I.* Per ottenere dal tubo addizionale codesto accrescimento di portata, convien dargli una determinata lunghezza che può fissarsi a un di presso di due o tre diametri della luce. Se sarà più corto, difficilmente si otterrà che l'acqua segua le pareti del tubo, e tutta n'empia la cavità. Se più lungo, la velocità e la portata ponno soffrire notabil discapito dal fregamento.

193. *Scolio II.* Giova anche osservare che allo sbocco dell'acqua da' tubi convergenti ha luogo un qualche ristringimento della vena, onde la vera loro portata riuscirà alquanto minore della teorica. E per lo contrario la portata de' tubi divergenti potrà trovarsi alcun poco maggiore della teorica.

194. *Scolio III.* Da tutto ciò che s'è detto finora può intendersi qual sia la forma più vantaggiosa degli emissarj. Per ottenere da una data luce l'efflusso massimo, conviene 1.° Scavare interiormente la parete del vaso a modo d'imbuto che secondi a un di presso l'andamento della vena contratta: ciò solo accresce la portata nella ragione di 10 a 16. 2.° Adattare esteriormente alla luce un tubo conico divergente così che sia

$\frac{f^2}{m^2}$ poco minore di $\frac{A+a}{a+b}$. La portata così cresce in ragione assai maggiore, e tanto più quanto è minore l'altezza d'acqua nel vaso.

CAP. XVIII.

Del corso dell' acqua pei lunghi tubi.

195. Al corso dell' acqua pei lunghi tubi fa notabile resistenza l' attrito. E quella qualunque tenacità colla quale le particelle dell' acqua s' attengono l' una all' altra, e s' attaccano alle pareti del tubo, accresce la resistenza, e dalle parti più prossime alle pareti la propaga alle più lontane. Quali elementi ed in qual guisa concorrano a modificare questa resistenza, è ricerca importante, tentata da varj Idrometri, e non per anche esaurita. I più si propongono dapprima una qualche semplice ipotesi, e passano poscia a confrontarne i risultati colla sperienza. Noi seguiteremo questa traccia, ed ommesse altre ipotesi meno verosimili, proporremo quella che ultimamente ha adottata il celebre sig. Prony (a).

(a) *Recherches sur la théorie des eaux courantes. Paris* 1804.

196. Questi suppone che ne' tubi dello stesso diametro l'espressione della resistenza abbia due termini, l'uno proporzionale al quadrato della velocità, l'altro alla velocità semplice. Ne' tubi poi di diverso diametro suppone la resistenza tanto maggiore, quanto minore è l'area della sezione, e quanto maggiore è il perimetro della medesima soggetto a fregamento. Onde la resistenza sarà inversamente proporzionale al rapporto dell'area al perimetro; al qual rapporto si dà il nome di *Raggio medio*. Pe' tubi cilindrici il raggio medio viene ad essere la quarta parte del diametro del tubo.

Sia la resistenza gR; il raggio medio D; la velocità equabile $= u$. Potremo esprimere la resistenza secondo l'ipotesi di Prony colla seguente formola

$$R = \frac{3\alpha}{2D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3\beta}{2D} \cdot u$$

essendo α, β due coefficienti costanti.

197. *Proposizione*. Sia il tubo cilindrico $EFPQ$ (Fig. 7) alimentato da un recipiente inesausto, ed inclinato alla verticale coll'angolo $CHB = \Phi$. Ridotto il corso dell'acqua a stato di permanenza, cercasi la velocità u.

Presa una sezione qualunque $RS = y$, corrispondente al punto M della direttrice

HMB, dicasi $HM = l$, $HB = L$, $AH = a$, $HZ = z = l \cos. \Phi$, $HC = b = L \cos. \Phi$. E chiamando al solito p la pressione sulla sezione indeterminata RS, dicasi A la pressione nel supremo livello KL, H la pressione sull'origine del tubo EF, B la pressione sulla sezione ultima PQ.

Consideriamo ora le forze che sollecitano lo strato elementare $Rr sS$. In primo luogo il suo peso $g y dl$ lo spinge secondo la direzione del corso con forza $= g y dl . \cos. \Phi = g y dz$. In secondo luogo la pressione $g y p$ spinge la faccia RS, ma la pressione $g y (p + dp)$ respinge all'indietro la faccia opposta rs, onde nasce una forza $= g y dp$ contro la direzione del corso. Finalmente la resistenza $g R$ esercitandosi sopra tutta la massa $y dl$, ritarda essa pure lo strato $Rr sS$ con forza $= g R y dl$. Onde la forza che sollecita questo strato sarà $= g y dz - g y dp - g R y dl$. Essendo per ipotesi il moto equabile, conviene che questa forza sollecitante sia $= 0$; onde nasce l'equazione

$$dp = dz - R dl$$

ed integrando

$$p = H + z - Rl$$

poichè quando $z = 0$, ed $l = 0$ dee venir $p = H$.

Ora la velocità dell'acqua pel tubo è quella stessa colla quale essa sgorga dalla

bocca del vaso EF, e questa si ha (179) dall' equazione $\frac{u^2}{2g} = \frac{2}{3}(A - H + a)$. Quindi $H = A + a - \frac{3}{2} \cdot \frac{u^2}{2g}$.

Finalmente quando $z = b$, ed $l = L$ dee venir $p = B$. Quindi $B = H + b - RL$. Posti per H ed R i loro valori, e supponendo al solito $A = B$, si avrà per determinar la velocità u l'equazione quadratica

$$(M)\ \left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right)\frac{u^2}{2g} + \frac{\beta L}{D} \cdot u = \frac{2}{3}(a + b)$$

198. *Scolio*. In luogo di questa equazione, reca il sig. Prony la seguente

$$\frac{\alpha L}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{\beta L}{D} \cdot u = \frac{2}{3}(a + b)$$

ommettendo il primo termine. E veramente questo termine può trascurarsi senza sensibil divario, qualunque volta l'altezza dovuta alla velocità è molto piccola rispetto dell' altezza $a + b$. Ma fuori di questo caso, l' ommissione di quel termine potrebbe trarre in errore. In fatti secondo la formola di Prony la velocità crescerebbe oltre ogni limite al diminuirsi della lunghezza, co icchè posto $L = 0$, verrebbe u infinita; il che è assurdo. Secondo la nostra formola, fatto $L = 0$, viene $\frac{u^2}{2g} = \frac{2}{3} a$, siccome appunto dev' essere.

199. *Coroll. I.* Potrebbe proporsi il seguente Problema. Inclinare il tubo alla verticale con tal angolo Φ, che la velocità dello sbocco sia eguale a quella con cui l' acqua uscirebbe dalla luce EF per un breve tubo addizionale.

L' equazione (M) posto per b il suo valore $L \cos. \Phi$, diventa

$$\left(1 + \frac{\alpha L}{D}\right) \frac{u^2}{2g} + \frac{\beta L}{D} . u = \frac{2}{3} (a + L \cos. \Phi)$$

Volendo adunque che sia $\frac{u^2}{2g} = \frac{2}{3} a$, e però $u = \sqrt{\frac{2}{3} . 2 g a}$, si pongano nell' equazione questi valori; ed essa riuscirà tutta divisibile per L, e darà per l' angolo cercato

$$\cos. \Phi = \frac{1}{D} (\alpha a + \beta \sqrt{3 a g})$$

200. *Coroll. II.* Poichè questo valore non inchiude la lunghezza L, è manifesto che dandosi al tubo questa inclinazione Φ, si avrà la stessa velocità e la stessa portata, comunque il tubo s' allunghi, o s' accorci. È palese che in questo caso la resistenza distrugge ad ogni istante quell' aumento di velocità che la forza acceleratrice tende a produrre; onde la velocità si mantiene invariata.

Che se il tubo è meno declive, la *velo-*

cità è minore di quella che si avrebbe dalla luce EF per un tubo addizionale, e tanto più scema, quanto più il tubo si prolunga. Se più declive, la velocità è maggiore, e cresce, allungandosi il tubo.

CAP. XIX.

Sperienze sul corso dell' acqua per lunghi tubi.

201. Appartiene ora alla sperienza il decidere se la resistenza segua veramente la legge supposta nel Capo precedente, siccome pure il fissare i valori de' coefficienti α, β che in tale ipotesi dovrebbono trovarsi costanti. Ci gioveremo a tal uopo delle belle e copiose serie di sperienze istituite da Bossut e du Buat sul corso equabile pei tubi. Esse furon fatte nel modo seguente.

202 *Sperienza*. Sotto una data altezza del recipiente si facea correr l'acqua per un tubo cilindrico di dato diametro, e di data lunghezza, e si misurava l'acqua che usciva per un dato tempo. Questa portata divisa pel tempo, e per l'area della sezione del tubo facea conoscere la velocità. Così variandosi a piacere ora l'altezza del recipiente, ora il diametro, or la lunghez-

za del tubo, poteasi scorgere come al variar di ciascuno di questi tre elementi variasse la velocità.

Lungo sarebbe il recar quì per minuto le sperienze stesse. Citeremo i luoghi degli Autori, ove potrà vedersene la descrizione, ed il risultato. Le principali sono comprese nelle quattro serie seguenti.

1.° Quelle di Bossut (*a*) con un tubo orizzontale del diametro di pollici Parigini 2,01 con lunghezze crescenti da 30 sino a 180 piedi, e sotto l' altezza ora di un piede, or di due.

2.° Simili dello stesso Autore (*b*) col tubo del diametro di pollici 1,33.

3.° Quelle di du Buat (*c*) con un tubo orizzontale del diametro d' un pollice, lungo or 24 pollici, ora 117, ora 138,5, ora 737; sotto diverse altezze del recipiente.

4.° Per ultimo quelle dello stesso Autore (*d*) con tubi molto angusti, de' diametri di lin. 2,9, lin. 2, lin. 1,5; e con diverse lunghezze ed altezze.

Confrontando con tutte queste sperienze l' equazione (M) ne ricavo i Corollarj seguenti.

(a) *Hydrodyn.* § 494. 495.

(b) *Ivi* §. 492. 493.

(c) *Principes d' hydraul.* §. 348.

(d) *Ivi* §. 337.

203. *Coroll. I.* Alle sperienze delle prime tre serie si soddisfa assai bene (preso per unità delle lunghezze il metro) coi coefficienti

$$\alpha = 0,003 \; ; \; \beta = 0,0004$$

Ponno quindi servire questi valori pei tubi, il diametro de' quali sta fra l' uno e i due pollici. Ma pei tubi di più stretto diametro, questi coefficienti darebbono la velocità notabilmente maggiore del giusto.

204. *Coroll. II.* Ricercando successivamente i valori di α, β, prima dalle sperienze fatte col tubo del diametro di poll. 2,01, poi da quelle col diametro di poll. 1,33, e così in seguito, si troverà che questi coefficienti riescono bensì costanti nello stesso tubo, ma cangiano col mutarsi del diametro. All' impiccolirsi del diametro cresce il coefficiente α, e per l' opposto sembra scemare il coefficiente β. Ond'è a conchiudere che l' esperienza conferma bensì la prima parte dell' ipotesi di Prony, non già la seconda; e che ne' diversi tubi la resistenza varia in una ragione differente dalla reciproca del raggio medio.

205. *Coroll. III.* Resta a cercare come dunque varj la resistenza al variarsi del raggio medio. Per tale effetto avendo io supposto

$$R = \frac{3\alpha}{2D^r} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3\beta}{2D^s} \cdot u$$

indicando r, s due esponenti costanti; ho trovato che ponendo

$\alpha = 0,00086$: $\beta = 0,0004$; $r = 1,274$; $s = 0,5$
l'equazione della velocità, che allora diventa

$$\left(1 + \frac{0,00086\,L}{D^{1,274}}\right) \frac{u^2}{2g} + \frac{0,0004}{D^{0,5}}\,L\,u = \frac{2}{3}\,(a+b)$$

rappresenta molto fedelmente tutte le sperienze indicate all'art. 202.

206. *Scolio I.* Sarebbe tuttavia a desiderare che si avessero altre sperienze fatte con maggior varietà di diametri, e specialmente sopra tubi assai grossi, onde assicurarci che la proposta legge sia veramente generale. Non mi sembrano opportune a tal uopo le sperienze di Couplet calcolate da du Buat, e da Prony, poichè la tortuosità di que' tubi aggiunge una nuova resistenza straniera a quelle delle quali cerchiamo ora la legge.

207. *Scolio II.* Potrebbe pensarsi che la resistenza dovesse variare anche secondo la diversa materia delle pareti del tubo, parendo infatti che altro debba essere l'attrito ne' tubi di metallo, altro in quelli d'argilla, altro in quelli di legno etc. Pure du Buat (*a*) con varie prove si è assicurato, che ciò non fa differenza sensibile. A cui

---

(*a*) *Ivi* §. 36.

dovrem credere, sintanto che altre prove non dian motivo di dubitarne.

CAP. XX.

Dei tubi sinuosi.

208. *Rivolta semplice* d'un tubo chiamerò quella, nella quale l'asse del tratto rettilineo superiore incontrando la concavità della parete, ed essendone riflettuto con angolo eguale a quello d'incidenza, imbocca direttamente l'asse del tratto rettilineo inferiore. Se non l'imbocca che dopo due o più riflessioni, sarà *rivolta composta*. Se non l'imbocca punto, sarà *rivolta irregolare*.

Riguardo la rivolta composta siccome formata di tante semplici, quante sono le successive incidenze dell'asse nella curvità delle pareti. E dirò *sezione della rivolta* quella che risponde al punto d'incidenza.

209. Per porre a calcolo la resistenza delle tortuosità terremo la stessa traccia che per le resistenze uniformi. E supporremo con du Buat (*a*) che la resistenza di ciascuna rivolta semplice sia proporzionale al

(a) *Principes d' hydr.* §. 102.

quadrato della velocità, ed al quadrato del seno dell'angolo d'incidenza.

Siano nel tubo cilindrico m rivolte coll'angolo d'incidenza i; n rivolte coll'angolo d'incidenza k etc. Esprimerassi la resistenza colla formola

$$\frac{3q}{2} \cdot \frac{u^2}{2g} \left\{ m \text{ sin. } i^2 + n \text{ sin. } k^2 + \text{etc.} \right\}$$

essendo q un coefficiente costante.

210. *Proposizione*. Poste le stesse cose che nella Proposizion precedente (197) determinare la velocità equabile e permanente dell'acqua pel tubo, avendo riguardo anche agl'impedimenti delle sinuosità.

Rifacendo lo stesso calcolo (197), al termine $g R y d l$ che esprime la resistenza uniforme, aggiungeremo il termine $g R' y d l$ che esprima la resistenza delle sinuosità. Quindi avremo

$$d p = d z - R d l - R' d l$$

onde

$$p = H + z - R l - \int R' d l$$

Qui il termine $\int R' d l$ rappresenta la resistenza delle sinuosità dall'origine del tubo sino al punto cui corrispondono le ascisse z, ed l, e però quel termine esprimesi (209) per

$$\frac{3q}{2} \cdot \frac{u^2}{2g} \left(m \text{ sin. } i^2 \ldots\ldots \right)$$

estendendo la serie m sin. i^2 etc. a tutte le

sinuosità superiori a quel punto. Che se questa serie comprenda tutte quante le sinuosità del tubo, essa esprimerà il valore dell' integrale $\int R'\,d\,l$ esteso per tutta la lunghezza del tubo, e quest' integrale denoteremo col segno $\Sigma.\,R'\,d\,l$.

Ciò posto, quando $z=b$, ed $l=L$, diventa $p=B$, e $\int R'\,d\,l=\Sigma.\,R'\,d\,l$. Posti questi valori avremo

$$B=H+b-R\,L-\Sigma.\,R'\,d\,l$$

onde fatto $A=B$, e messi per H, R, e $\Sigma.\,R'\,d\,l$ i loro valori, avremo per la determinazione della velocità l'equazione

$$(N)\quad \left.\begin{array}{l}\left(1+\frac{\alpha L}{D}\right)\frac{u^2}{2g}+\frac{\beta L}{D}.\,u\\ +\frac{q u^2}{2g}\,(m\,\text{sin.}\,i^2+n\,\text{sin.}\,k^2\ \text{etc.})\end{array}\right\}=\frac{2}{3}(a+b)$$

211. *Corollario*. Siano due tubi d'egual diametro, lunghezza, e caduta; il primo retto, l'altro sinuoso; e cammini l'acqua per essi con pari velocità. Converrà che l'altezza a' dell'acqua sopra l'origine del tubo sinuoso sorpassi l'altezza a sopra l'origine del tubo retto, e sarà l'eccesso $a'-a$ proporzionale ad

$$u^2\,(m\ \text{sin.}\ i^2+n\ \text{sin.}\ k^2+\text{etc.})$$

Infatti dall'equazione (N) relativa al tubo sinuoso (nella quale in luogo di a si

scriverà a') si sottragga l'equazione (M) relativa al tubo retto; e poichè le quantità D, L, b, α, β, u sono le stesse per ambi i tubi, questa sottrazione darà appunto

$$a' - a = \frac{3\,q}{2} \cdot \frac{u^2}{2\,g} \cdot (m \sin. i^2 + n \sin. k^2 + \text{etc.})$$

212. *Scolio*. Avvertasi che l'equazione (N) si renderebbe più conforme alle sperienze, dividendo $\alpha\,L$, e $\beta\,L$ non già per D, ma piuttosto per D^r e D^s rispettivamente; secondo ciò che di sopra (205) fu detto.

CAP. XXI.

Sperienze sui tubi sinuosi.

213. Sperienza. Preparati due tubi di diametro e di lunghezza eguale, l'uno retto, l'altro a più rivolte regolari con diversi angoli d'incidenza, facciasi correr l'acqua per essi sotto tali altezze de' rispettivi recipienti, che la velocità e la portata riescano eguali in entrambi. E si noti l'eccesso dell'altezza dell'acqua sull'origine del tubo sinuoso sopra quella del tubo retto.

Ventidue di tali sperienze fece du Buat (a) con un tubo del diametro d'un pollice, e

(a) *Princ. d' hydraul.* §. 357.

tre con altro tubo del diametro di due pollici. Noteremo i principali risultati che si raccolgono da queste, e da poche altre sperienze di Bossut, e di Venturi.

214. *Coroll. I.* Il suddetto eccesso riuscì proporzionale ad $u^2 (m \sin. i^2 + n \sin. k^2 + \text{etc.})$ sin tanto che l'angolo d'incidenza non oltrepassò 36.° Quindi entro questo limite il coefficiente q è prossimamente costante. Il suo valor medio pel tubo del diametro d'un pollice riesce $q = 0, 15$.

215. *Coroll. II.* Ma tostochè l'incidenza sorpassa 36.°, il coefficiente q fassi notabilmente maggiore. Quindi ove il corso piega ad angolo retto, e molto più nelle svolte acute, la resistenza è maggiore di quello porta l'ipotesi di du Buat.

Per lo contrario al crescere del diametro il coefficiente q s'impiccolisce. Per lo che l'impedimento delle svolte non è già indipendente dall'ampiezza del letto, siccome pose Buat, ma fa minore effetto ne' letti più ampj. Ma per accertare la legge di queste mutazioni, maggior numero e varietà di prove si richiederebbe.

216. *Coroll. III.* Si è pur anche osservato 1.° Che i serpeggiamenti verticali rallentano il moto alquanto più che non fanno gli orizzontali (a). 2.° Che le piegature brusche ad

(a) *Bossut Hydrodyn.* §. 524.

angolo son più nocive dei seni curvilinei (*a*). 3.° Che le rivolte irregolari impediscono il corso più che non fanno le regolari (*b*).

CAP. XXII.

Della pressione sulle pareti de' tubi.

217. Proposizione. Poste le stesse cose che nelle Proposizioni precedenti (197. 210) determinare la pressione dell'acqua corrente sopra un punto qualunque delle pareti.

Sciogliesi il Problema mediante l'equazione (197) $p = H + z - R\,l$, posti per H ed R i loro valori; e se oltre la resistenza uniforme $g\,R$ vi fosse la resistenza $g\,R'$ proveniente da sinuosità, si prenderà l'equazione (210)

$$p = H + z - R\,l - \int R'\,d\,l.$$

218. *Coroll. I.* Quando $z = b$, ed $l = L$ diventa $\int R'\,d\,l = \Sigma . R'\,d\,l$, e $p = B$, ovvero A (giacchè supponghiamo $A = B$). Quindi si ha

$$A = H + b - R\,L - \Sigma . R'\,d\,l$$

(a) *Venturi Rech. sur la communication laterale du mouv. Exp. XXIII.*

(b) *Du Buat l. c. Exp.* 98.

Sottratta questa equazione da quella dell' articolo precedente, avremo

$$p = A - b + z + R(L-l) + \Sigma . R' dl - \int R' dl$$

ove per R, $\Sigma . R' d l$, $\int R' d l$ potremo porre i loro valori.

219. *Coroll. II.* Quindi pel tubo retto viene

$$p = A - b + z + \frac{3}{2} . \frac{L-l}{D} \left(\frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u\right)$$

E se il tubo è sinuoso, a questo valore si dovrà aggiungere la serie

$$\frac{3q}{2} . \frac{u^2}{2g} (\mu \text{ sin. } \iota^2 + \nu \text{ sin. } x^2 + \text{etc.})$$ essendo i termini μ sin. ι^2 etc. relativi alle sinuosità inferiori al punto per cui si cerca la pressione.

220. *Coroll. III.* Declini il tubo dalla verticale così che sia

$$\cos. \phi = \frac{1}{D} (\alpha a + \beta \sqrt{3 a g})$$

La pressione sulle pareti del tubo si troverà costante, e per tutto uguale alla pressione atmosferica A.

Perciò se un tal tubo si scoprisse alla cima, aprendo tutta la parete superiore, non seguirebbe alterazione veruna, e l' acqua manterrebbe il suo corso uniforme con velocità ed altezza costante.

Che se il tubo è meno declive, la pres-

sione all' origine è maggiore di A, e scema poi gradatamente andando verso lo sbocco. Succede il contrario nel caso opposto; nel qual caso può la pressione all' origine decrescer tanto che divenga negativa; ed allora l' acqua abbandona le pareti, e più non riempie tutta la cavità del tubo.

221. *Scolio*. Due cose per ultimo voglionsi avvertire per non prendere equivoco in questa misura delle pressioni. La prima è che le formole precedenti manifestano soltanto la pressione che proviene dalla gravità in quanto si esercita nel senso della direttrice, o sia dell' asse del tubo: conviene aggiungervi (94) la pressione che proviene dalla gravità che si esercita normalmente alla direttrice. Ond' è che in una stessa sezione i punti inferiori delle pareti saranno alquanto più premuti, che i superiori non sono.

L' altra avvertenza riguarda le sezioni delle rivolte; nelle quali la forza centrifuga produce anch' essa una pressione che vuolsi aggiungere a quella che proviene dalle forze sollecitanti. Va dunque la pressione p accresciuta (I. 227) nella parte concava delle pareti e scemata nella parte convessa della quantità $\frac{u^2}{r}$, essendo u la velocità

uniforme pel tubo, ed r il raggio osculatore della curvatura della parete.

SEZIONE TERZA

Del Moto dell' Acqua per gli Alvei.

C A P. XXIII.

Del Moto per gli Alvei in generale.

222. L'Alveo si suppone alimentato con influsso perenne da un recipiente inesausto di superficie amplissima; il corso dell' acqua pel medesimo si considera dopo ridotto a stato di permanenza; e riguardasi come lineare, salve le restrizioni che accenneremo appresso.

223. Nel rintracciarne le leggi giova prescinder prima da ogni sorta di resistenze ed irregolarità. Le *resistenze* poi altre sono *uniformi*, ed impediscono egualmente tutte le sezioni; tali son quelle che nascono dall' attrito, e dall' imperfetta fluidità: altre sono *locali*, e particolari a certe sezioni, e a certi tratti del fiume; tali sono le irregolarità del letto, e i rigurgiti.

224. Similmente giova considerare dappri-

valutarsi dall' altezza del pelo d'acqua sopra di quel punto.

CAP. XXIV.

Del moto per gli Alvei sgombri d' ogni resistenza.

227. PROPOSIZIONE I. Corra l'acqua per l'alveo $EFPQ$ seguitando la direttrice HG inclinata alla verticale coll'angolo $CHB = \Phi$. La velocità u nella sezione RS corrispondente all' ascissa $HM = x$, è determinata dall' equazione

$$g\,d\,x \cos.\,\Phi = u\,d\,u.$$

La gravità g che accelera lo strato elementare $RSsr$ se si risolve in due forze, l' una secondo la direttrice, l' altra ad essa perpendicolare, sarà la prima di queste forze $= g \cos.\,\Phi$. Di più sarebbe a considerare l' eccesso della pressione sulla faccia RS sopra quella della faccia opposta rs; ma essendo queste pressioni uguali (225) un tale eccesso è nullo. Dunque la forza acceleratrice è semplicemente $g \cos.\,\Phi$; onde (I. 185) si ha tosto l' equazione di sopra scritta.

228. *Corollario*. Dicasi s l' altezza dovuta alla velocità nella sezione RS, ed S l' altezza dovuta alla velocità nell' origine dell'

alveo $E F$; sarà

$$s = S + x \cos. \phi$$

Questo si ottiene coll' integrare l' equazione precedente; il che si fa senza difficoltà alcuna, poichè qui supponendosi il moto già renduto permanente, la u è funzione della sola variabile x, e non ha luogo l' osservazione dell' art. 92. Quindi si ha subito $\frac{u^2}{2g} = s = C + x \cos. \phi$ e poichè $x = 0$ dà $s = S$, ne risulta appunto il proposto valore di s.

229. *Proposizione II.* Sia l' alveo di sezione rettangolare, e d' uniforme larghezza; e sia l' altezza della prima sezione $EF = h$, l' altezza della sezione $RS = y$. La curva FSQ del pelo dell' acqua corrente ha per equazione

$$x \cos. \phi = S \left(\frac{h^2}{y^2} - 1 \right)$$

Quest' equazione si deduce subito da quella dell' articolo precedente. Poichè siccome le altezze s, S dovute alle velocità sono reciprocamente proporzionali ai quadrati delle sezioni RS, EF, o sia delle loro altezze y, h, sarà $s = \frac{h^2 S}{y^2}$; onde etc.

230. *Coroll. I.* Questa curva è l' iperbola cubica già proposta dal celebre Gugliel-

mini (*a*). Volta la sua convessità al fondo del canale, e converge con esso asintoticamente. Quando l' alveo è poco declive, il pelo ha curvatura insensibile e confondesi con una linea retta parallela al fondo; e facendosi il fondo orizzontale, la superficie diventa essa pure un piano orizzontale, e l' acqua ha corso uniforme.

231. *Coroll. II.* Se la larghezza del letto variasse, o se le sezioni avessero forma diversa dalla rettangolare, diversa pure riuscirebbe la curva FSQ. Per altro quando la larghezza sia costante, e superi notabilmente l' altezza delle sezioni (siccome ne' fiumi frequentemente accade) la curvatura della superficie di pochissimo si scosterà da quella che abbiamo stabilito.

232. *Scolio.* Le proposizioni di questo Capo rappresentano il corso dell' acqua prossimamente bensì, ma non già a tutto rigore. Poichè la condizione a cui dee soddisfare la curva FSQ si è che in tutti i punti di questa curva la pressione della corrente sia eguale a quella dell' atmosfera. Or per adempire compiutamente questa condizione non basta considerar la pressione che nasce dalle forze parallele alla direttrice, siccome abbiam fatto, ma dovrebbe di più

(a) *Mensura Aquarum fluentium Lib. V. Prop.* 8.

considerarsi e la pressione che nasce dalle forze normali alla direttrice, e quella che nasce dalla forza centrifuga. Dovrebbe adunque cercarsi quella curva FSQ, nella quale la somma di queste pressioni riuscisse costante. Sarebbe questa la rigorosa curvatura della superficie, e trovatane l'equazione, e postovi per y il suo valore in s, si avrebbe il rigoroso valore della velocità media. Ma non giova impegnarsi in questa ricerca, della quale la pratica non ritrarrebbe gran frutto.

CAP. XXV.

Delle resistenze uniformi.

233. Nascono dalle medesime cagioni, e par certo che debbano seguire le stesse leggi, ed esprimersi colla stessa formola le resistenze uniformi al corso dell'acqua pe' tubi, ed al corso per gli alvei. Noi dunque così crederemo, a meno che la sperienza non decida in contrario. Frattanto esprimendo generalmente per gR questa resistenza, facilmente otterremo le due proposizioni che seguono.

234. *Proposizione I.* Posta la resistenza uniforme $= gR$, la velocità u è determi-

nata dall' equazione

$$g\,d\,x \cos. \Phi - g\,R\,d\,x = u\,d\,u\,.$$

Questa equazione si trova come all' art. 227, osservando essere ora la forza acceleratrice $g \cos. \Phi - g\,R$. Dovrà poi nell' equazione stessa porsi il valore di R espresso per u, e quindi integrarla.

235. *Proposizione II.* La curva FSQ del pelo dell' acqua è determinata dall' equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y^3}{2\,h^2\,S}\left(R - \cos. \Phi\right)$$

Questa equazione derivasi dalla precedente, ponendo per u, e $d\,u$ i loro valori $\frac{h\sqrt{2\,g\,S}}{y}$, $-\frac{h\,d\,y\sqrt{2\,g\,S}}{y^2}$. In essa poi, prima d' integrarla, converrà porre in luogo di R il suo valore espresso per y.

236. *Scolio I.* Mostriamo con un esempio il modo di trovare le espressioni che debbonsi sostituire in luogo di R nelle due equazioni degli articoli precedenti. Sia la larghezza l dell' alveo grandissima in confronto dell' altezza dell' acqua in ogni sezione; sarà l' area della sezione $R\,S$ prossimamente $= l\,y$; ed il suo perimetro soggetto all' attrito sarà prossimamente $= l$; Quindi avremo il raggio medio $D = y$. E posto questo valore di D nell' espressione di R proposta all' art. 196, avremo

8

$$R = \frac{3\alpha}{2y} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3\beta}{2y} \cdot u$$

Siccome poi abbiamo $u = \frac{h\sqrt{2gS}}{y}$ potremo facilmente ottenere il valore di R o tutto espresso per u, o tutto per y. La prima di queste espressioni dovremo porre nell'equazione dell'art. 234, e la seconda nell'equazione dell'art. 235.

237 *Scolio II.* Così avremo la velocità in ogni punto, e la curva del pelo dell'acqua con un approssimazione ben più che sufficiente per la pratica: che se queste cose volessero determinarsi a tutto rigore, converrebbe intraprendere la ricerca accennata sul fine del Capo precedente.

CAP. XXVI.

Del corso equabile per gli Alvei.

238. PROPOSIZIONE. Per quegli Alvei, o per quei tratti dell'alveo, pei quali l'acqua corre equabilmente mantenendo sezione e velocità costante, la velocità è determinata dall'equazione

$$R = \cos. \phi$$

La quale nasce dalla precedente (234) ponendovi $du = 0$.

239. *Coroll. I.* Adottando quindi per R l' espressione altrove (196) proposta, avremo per determinare la velocità l' equazione

$$(O) \quad \frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u = \frac{2}{3} D \cos.\Phi$$

Chiamando M l' area della sezione RS, ed N il suo perimetro soggetto all' attrito potremo ancora scrivere quest' equazione così

$$\frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u = \frac{2M}{3N} \cdot \cos.\Phi$$

240. *Coroll. II.* Dicasi Q la portata del fiume, sarà $Q = Mu$. Per mezzo di quest' equazione, e della precedente, date tre fra le cinque quantità Φ, M, N, Q, u, conosceremo le due rimanenti.

241. *Coroll. III.* È frequente il caso di letti così ampj che la larghezza l superi notabilmente l' altezza y dell' acqua corrente. Allora può farsi $M = ly$, $N = l$, onde $D = y$, e le due equazioni divengono

$$\frac{\alpha u^2}{2g} + \beta u = \frac{2}{3} y \cos.\Phi \; ; \qquad Q = luy$$

E qui fra le cinque quantità Φ, l, y, Q, u date tre, conosceremo le altre due.

CAP. XXVII.

Sperienze sul corso equabile per gli Alvei.

242. Ad esprimere la resistenza uniforme negli Alvei abbiamo tradotta quella stessa formola che già proponemmo (196) pei tubi; e vorremmo pur credere che anche i coefficienti costanti α, β dovessero conservare gli stessi valori. Per quanto ragionevole possa parere un tale concetto (che veramente trattandosi di resistenze dello stesso genere non v'è motivo di credere che ne' tubi agiscan d'un modo, negli alvei d'un altro) pure è da vedere se le sperienze vi corrispondano. Al qual uopo non ponno comodamente servire se non che le sperienze fatte sugli alvei di corso equabile. E queste sino ad ora si riducono alle due serie seguenti.

243. *Sperienza I.* Il sig. Bossut (a) adoperò una doccia rettangolare lunga ora 300 ora sino a 600 piedi, larga 5 pollici, col fondo disposto in un piano inclinato così che l'altezza fosse un decimo della base. Questa doccia riceveva l'acqua da una

(a) *Hydrodyn.* §. 632 *suiv.*

vasca inesausta per un apertura rettangolare, munita d'una cataratta. Con un leggerissimo galleggiante esploravasi la velocità della corrente, ed aveasi altronde la portata del canale, che era la stessa che si sarebbe ottenuta dall'apertura della vasca, tolto via il canale. La portata si variava a piacere, ora coll'alzar più o meno la cataratta che chiudeva l'apertura della vasca, ora col cangiare l'altezza dell'acqua nella vasca medesima.

244. *Scolio*. Qui il corso era veramente uniforme, giacchè potendosi comodamente seguire per lunghi tratti il moto del galleggiante, si osservò correre spazj eguali in tempi eguali, tranne un qualche ritardo verso l'origine del canale, e un qualche acceleramento verso il suo termine.

Sebbene non fosse osservata se non che la velocità della superficie, pure da questa si può inferire prossimamente la velocità media con una regola che spiegheremo fra poco. Conoscendosi poi la portata, e la velocità media, si calcola facilmente la sezion del canale, ed il suo perimetro, onde il raggio medio. E così si hanno tutti i dati per confrontare con ciascuna di queste sperienze l'equazione (*O*).

245. *Sperienza II.* Il sig. du Buat (*a*) ado-

(*a*) *Princ. d'hydraul.* §. 377.

però un canale lungo 132 piedi, di sezione ora rettangolare, ora trapezia, disposto a varie pendenze, ed alimentato dallo sfioratore d'una vasca. Egli misurava ad ogni sperienza la sezion del canale, il suo perimetro, e la sua portata. La sezione divisa pel perimetro dà il raggio medio, la portata divisa per la sezione dà la velocità media; onde sono in pronto tutti gli elementi dell' equazione (*O*).

246. *Scolio I.* In un canale così breve il corso non avrebbe potuto divenir uniforme, se lo sbocco fosse stato libero. Quindi s'avvisò du Buat di sostenere la caduta dell'acqua ricevendola in un ampio vaso che mantenevasi pieno a quell' altezza che si riputava bastante per togliere la chiamata dello sbocco, e rendere il còrso a un dipresso equabile. Nel che provò molta difficoltà ed imbarazzo. Questi incomodi gli riusciron maggiori nelle picciolissime pendenze del canale, poichè allora il ringorgo del recipiente si estendeva fino all'origine, oltre la difficoltà di misurare esattamente così scarse cadute in un canale sì corto.

247. *Coroll. I.* L'equazione (*O*) cogli stessi valori de' coefficienti (203)

$$\alpha = 0,003 \quad ; \quad \beta = 0,00004$$

soddisfa lodevolmente alle sperienze sopra descritte.

248. *Coroll. II.* Molto meglio ancora si trovano coincidere le sperienze colla formola, se si corregga l' espressione della resistenza come fu suggerito (205) pei tubi, colla qual correzione in vece dell' equazione (O) si ha la seguente

$$\frac{0,00086}{D^{1,274}} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{0,0004}{D^{0,5}} \cdot u = \frac{2}{3} \cos. \phi$$

Quest' equazione corrisponde esattissimamente alle sperienze di Bossut, ed anche a quelle di du Buat, tranne alcune poche, nelle quali la pendenza del canale era picciolissima.

249. *Coroll. III.* Adunque la resistenza uniforme al corso dell' acqua segue veramente le stesse leggi e si esprime colla stessa formola, o corra l' acqua per un tubo, o per un canale aperto.

250. *Scolio II.* In piccoli corsi d' acqua furon fatte le sperienze che ci guidano ai sopradetti risultati. Può rimaner dubbio non irragionevole sulla loro applicazione alle ampie sezioni de' canali navigabili, e de' fiumi. Sopra tutto i valori de' coefficienti ben potrebbono esser diversi in tali casi, e potrebbon anche variare secondo le qualità de' fondi che costituiscono il letto del fiume. Una serie d' osservazioni ben fatte sui tratti più regolari ed uniformi di varie cor-

renti, ove si notassero accuratamente le dimensioni dell'alveo, la sua pendenza e la velocità media, ci procurerebbe su questo punto maggiori lumi.

CAP. XXVIII.

Delle escrescenze e decrescenze de' Fiumi.

251. Uno de' più interessanti problemi dell'Idrometria è il seguente: crescendo la portata d'un fiume in ragion data, trovare l'alzamento del pelo d'acqua. Pei tratti di corso equabile la soluzion del Problema si deduce agevolmente dalle cose di sopra dette.

252. *Proposizione*. La relazione fra la portata Q d'un fiume, la sua pendenza e le dimensioni del suo letto, si ha dall'equazione

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta M Q = \frac{2M^3 \cos. \phi}{3N}.$$

La quale equazione ricavasi da quella dell' art. 239 posto per u il suo valore (240) $\frac{Q}{M}$.

253. *Coroll. I.* Data la figura dell'alveo, M ed N saranno funzioni note dell'altezza y. Sostituite queste nell'equazion precedente si avrà la cercata relazione fra Q, ed y.

254. *Coroll. II.* Sia la sezione un trapezio, l la larghezza del fondo, ny la base della scarpa; sarà $M = ly + ny^2$; $N = l + 2y\sqrt{(1+n^2)}$. Introdotti questi valori avremo

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta Q(ly + ny^2) = \frac{2}{3} \cdot y^3 \cos.\Phi \frac{(l+ny)^3}{l+2y\sqrt{(1+n^2)}}$$

equazione di sesto grado rapporto ad y.

255. *Coroll. III.* Se la sezione è rettangola, sarà $n = 0$, e l'equazione si abbassa al terzo grado

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta l y Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{l^3 y^3 \cos.\Phi}{l + 2y}$$

256. *Coroll. IV.* Qualunque poi siasi la figura dell'alveo, se la larghezza l è assai grande rispetto dell'altezza y, può farsi $M = ly$, $N = l$, onde

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} + \beta l y Q = \frac{2}{3} \cdot l^2 y^3 \cos.\Phi$$

Questo caso è assai frequente negli alvei de' fiumi naturali: esso dà luogo ai Corollarj che seguono.

257. *Coroll. V.* Quando il moto della corrente è assai lento, la velocità media è proporzionale all' altezza, e la portata è proporzionale al quadrato dell' altezza.

Poichè quando u è una frazione assai piccola, il primo termine $\frac{\alpha u^2}{2g}$ dell' equazione

(*O*) sparisce in confronto del termine βu; onde hassi prossimamente

$$u = \frac{2\gamma \cos.\Phi}{3\beta}\ ;\ Q = \frac{2l\gamma^2 \cos.\Phi}{3\beta}$$

Questa è la regola che per la misura delle acque correnti stabilì generalmente il P. Ab. Castelli (*a*) riguardando la velocità in ciascun punto della sezione come l'effetto adeguato della pressione dell'acqua sovrastante, e misurando questa pressione dall' altezza. Giunti per tutt'altra strada alla medesima regola, noi veggiamo ora in quali casi potrà essa verificarsi.

258. *Coroll. VI.* Quando il moto della corrente è assai rapido, le velocità *medie* sono prossimamente proporzionali alle *radici* delle altezze; e i quadrati delle portate sono come i cubi delle altezze medesime.

Poichè allora nell'equazione (*O*) può trascurarsi il secondo termine βu che diviene assai piccolo in paragone del primo; onde viene

$$u^2 = \frac{4g\gamma \cos.\Phi}{3\alpha}\ ;\ Q^2 = \frac{4gl^2\gamma^3 \cos.\Phi}{3\alpha}$$

Questa è la regola che il celebre Domenico Guglielmini (*b*) sostituì a quella del

(a) *Misura delle Acque correnti Lib. II. Prop. 2.*
(b) *Mensura Aquar. fluent. Lib. IV. Prop. 8.*

Castelli, per que' tratti del fiume, ne' quali spenta affatto la velocità ragionata dalla discesa, egli immaginò che la velocità di ciascun punto della sezione dovesse riconoscersi unicamente dall' altezza dell' acqua premente, e fosse dovuta a quell' altezza. Rendesi ora manifesto in quali casi possa prossimamente aver luogo codesta regola.

259. *Coroll. VII.* Ne' gradi mezzani di velocita, gli aumenti della velocità e dell' altezza per un dato incremento di portata avranno un valore intermedio fra quelli che risulterebbono dalle due regole precedenti. Ed in ogni caso, quando l' altezza della corrente abbia notabil proporzione alla larghezza, dovranno rilevarsi dalle formole esposte quì sopra.

260. *Scolio*. Da' tempi del Castelli e del Cassini sino a' dì nostri molte sperienze e da molti sono state istituite colla lusinga di scoprire una relazion costante fra le portate, e le altezze delle sezioni. I risultati furono sommamente discordi, e dovean esserlo, giacchè come abbiam veduto, quella relazione dipende dalla inclinazione e dalla figura dell' alveo, che fu varia nelle diverse sperienze.

Non è poi possibile istituire un esatto confronto di veruna di queste sperienze coll' esposta Teoria; poichè in alcune non è no-

tata la pendenza dell' alveo, e la figura della sezione; in altre il moto affetto da locali irregolarità era tutt' altro che equabile.

CAP. XXIX.

Della scala delle velocità.

261. Le resistenze uniformi non agiscono egualmente su tutti i punti d' una stessa sezione. Poichè l' attrito non ritarda se non che le particelle radenti il fondo, e le sponde; ed è poi l' adesion mutua che propaga alle particelle più lontane la resistenza, di cui l' effetto tanto più scema, quanto più ci scostiamo dalla parete soggetta al fregamento. La sola sperienza può mostrarne come si comparta il totale effetto della resistenza fra i varj punti della sezione; e quindi come degradi la velocità dalla superficie al fondo, e dal filone alle sponde, e qual luogo tenga la velocità media fra le diverse che a varj punti della sezione appartengono.

262. *Sperienza*. Di due maniere sono le sperienze sino ad ora tentate. Altri, come du Buat (a) si sono contentati di misurare

(a) *Princip. d' hydr.* §. 389.

la velocità superficiale nel filone, la velocità media, e la velocità rasente il fondo. La prima s'esplora co' galleggianti, la seconda si deduce dalla portata del canale divisa per la sezione, la terza coll'osservare il moto di globetti poco più pesanti dell' acqua, e trasportati dalla corrente lungo il fondo.

Altri poi con diversi strumenti idrometrici, de' quali diremo a suo luogo, hanno misurata la velocità in molti punti d'una sezione, tentando così di riconoscere l'intera scala delle velocità. Michelotti (*a*) e Ximenes (*b*) ci hanno lasciate alcune serie di siffatti esperimenti. Ecco i principali risultati di tutte queste prove.

263. *Coroll. I.* La velocità media della sezione è media proporzionale aritmetica fra la velocità della superficie nel filone, e la velocità presso il fondo.

Sia la velocità della superficie $= v$; la velocità media $= u$; la velocità presso il fondo $= w$. Trovasi

$$u = \frac{v + w}{2}.$$

(a) *Sperimenti Idraulici. Tom. II.* §. 28.

(b) *Nuove sperienze idrauliche* §. 206. *segg.* §. 217. *segg.*

264. *Coroll. II.* La relazione tra la velocità media, e quella della superficie, hassi dall' equazione (*a*)

$$u = v \cdot \frac{v + 2,372}{v + 3,153}$$

preso il metro per unità.

265. *Coroll. III.* Conoscendo pertanto una delle tre velocità v, u, w si conoscono le altre due.

266. *Coroll. IV.* Se la velocità della superficie non eccede tre metri per ogni minuto secondo (limite che in pratica non oltrepassa giammai) può farsi senza divario notabile

$$u = \frac{4}{5} v ; \; w = \frac{3}{5} v$$

cosicchè le tre velocità v, u, w sono prossimamente tra loro, come i numeri 5, 4, 3.

267. *Coroll. V.* Dalla superficie scendendo sino a non molta distanza dal fondo, la velocità o si mantiene costante, o scema lentamente; indi rapidamente decresce sino al fondo. Alcuna volta la velocità sembra crescere poco sotto la superficie; forse per effetto del vento che increspa e ritarda il pelo dell' acqua.

(a) *Prony Rech. sur la th. des eaux courantes.* §. 194.

268. *Scolio*. Quì ritorna il sospetto se la legge osservata ne' piccoli corsi d'acqua possa con sicurezza trasferirsi alle ampie sezioni de' fiumi gonfj. Cade il dubbio principalmente sui risultati delle sperienze di du Buat. E quelle pure di Michelotti e di Ximenes quantunque fatte in sezioni ed altezze d'acqua molto maggiori, pur lasciano luogo a desiderare che si trovi modo di ripeterle nelle sezioni massime de' fiumi in piena, onde scorgere in tutti i casi la legge della natura. E similmente si vorrebbe esplorare la degradazione sensibilissima della velocità dal filone alle sponde, del quale oggetto niuno sperimentatore si è fino ad ora occupato.

CAP. XXX.

Delle Resistenze locali, e prima de' rigurgiti.

269. L'ipotesi del moto lineare non può guari ajutarci a conoscere il corso dell'acqua pe' tratti alterati dalle resistenze locali. Ben potrebbono giovarne assai le sperienze, se pur ne avessimo, e le osservazioni; ma anche di questo lume sino ad ora siam privi. Quindi è che gl' insegnamenti

degl' Idrometri sugli effetti di tali resistenze sono così vaghi e così discordi che non possiamo per niun modo affidarvici. Non lascieremo tuttavia di proporre su questa materia quelle opinioni che ci sembrano meglio fondate; più tosto con animo d' incamminare alla ricerca delle cognizioni delle quali manchiamo, che non di supplire pienamente a questa mancanza.

270. Comincieremo dal considerare i rigurgiti, o più generalmente tutte le circostanze che accompagnano gli sbocchi de' fiumi di letto stabile. Rappresenti *M B N* (Fig. 8) il fondo del fiume, e *P A Q* il suo *pelo naturale*, qual sarebbe se il fiume corresse seguitamente senz' altro impedimento che quello delle resistenze uniformi. Immaginiamo che nella sezione *A B* il suo corso venga interrotto, sboccando ivi il fiume in un recipiente di superficie orizzontale e permanente. E qui distingueremo tre casi secondo che la superficie del recipiente incontra il pelo naturale *P A Q* o nella sezione *A B* dello sbocco, o in un punto superiore a quella sezione, o in un punto inferiore.

234. *Proposizione I.* Se il pelo *A T* del recipiente va a congiungersi col pelo *P A Q* del fiume nella sezione *A B* dello sbocco, il corso del fiume nella sezione *A B* e nel-

le superiori non soffrirà alterazione veruna.

Quest' asserzione parmi di verità evidente. Poichè se la sezione *A B* soggiacesse a qualche ritardo, ciò sarebbe in grazia della pressione che soffre dall' acqua del recipiente. Ora questa pressione per ciascun punto della sezione *A B* misurasi dall' altezza del livello *A T* sopra di quel punto. Ma ogni punto della sezione *A B* sostien pure dall' acqua sopravvegnente del fiume una pressione, misurata (226) dall' altezza del livello *A T* sopra di esso. Pareggiandosi dunque nella sezione *A B* la pressione dell' acqua del fiume con quella del recipiente, non può questa indurre veruna alterazione alla sezione *A B*, nè alle superiori.

272. *Scolio*. Oltre la resistenza che fa il recipiente colla pressione delle sue acque, alcuni Autori (*a*) mettono a calcolo la resistenza che nasce dal dovere il fiume divider l' acqua del recipiente, e aprirsi strada attraverso di essa. Ma questa resistenza non può alterare la velocità nella sezione *A B*; poichè per quanto si rallenti il moto dell' acqua dopo che è entrata nel recipiente, siccome essa ha libertà di espandersi, e di acquistare in sezione quanto perde in velocità, così non può far contrasto alla

(a) *Pitot Mem. de l' Acad. de Paris* 1730.

sezione *A B*, e tenerla in collo, ritardandone la velocità. Ed infatti per molte sperienze siam certi che un foro aperto nel fondo d' un vaso dà la stessa portata, sia che la vena sgorghi nell' aria, sia che sbocchi in un vaso che mantengasi colmo al livello del foro.

273. *Proposizione II.* Se il pelo *C S* del recipiente incontra il pelo *P A Q* in un punto superiore alla sezione *A B* dello sbocco, il corso del fiume allo sbocco sarà ritardato; la sezione *A B* si solleverà sino in *L* al livello del recipiente. Seguirà un proporzionato alzamento nelle sezioni superiori sino alla *C D*, nella quale il pelo del recipiente incontra il pelo naturale del fiume. Nella sezione *C D* e nelle superiori non seguirà alterazione veruna.

La ragione del rallentamento di corso che dee seguire verso lo sbocco è palese. Poichè la sezione *A B* è premuta dal recipiente quanto porta l' altezza del livello *C S*, mentre dall' acqua sopravvegnente del fiume è premuta (226) sol quanto porta l' altezza del livello *A T*. Prevalendo dunque la pressione del recipiente a quella del fiume, è forza che il corso si ritardi, e l' acqua del fiume si sollevi in *A B* a segno di poter esercitare una pressione eguale e contraria a quella del recipiente, vale a dire sino *in*

L. E similmente dovranno rialzarsi tutte le sezioni superiori sino alla *CD*; nella quale pareggiandosi la pressione dell'acqua posteriore con quella dell'anteriore, mostrasi col discorso precedente (271) non poter seguire alterazione veruna.

274. *Scolio.* Varie sono le opinioni, o più tosto le conghietture degli Autori (*a*) sulla distanza a cui si estende l'effetto del rigurgito, e sulla figura del pelo d'acqua nel tratto rigurgitato. A me per le cose precedenti sembra conchiudersi assai probabilmente, che l'effetto del rigurgito non si avanzi oltre la sezione *CD*, cioè oltre il concorso del pelo del recipiente col pelo naturale del fiume. E che questo pelo al di sopra di *CD* non s'alteri sensibilmente; e nel tratto inferiore non possa guari deviare dalla positura orizzontale continuata col livello del recipiente. Alla quale opinione siami concesso d'attenermi, sin tanto che o la teoria, o la sperienza non ci scorga a qualche più precisa determinazione.

275. *Proposizione III.* Se il pelo *BR* del recipiente rimane inferiore alla sezione *AB*, il corso del fiume allo sbocco sarà ac-

---

(a) *V. Manfredi Annotazioni al Guglielmini; Al Cap. VIII. Annot.* 5 6.
Buat Princ. d'hydr. §. 150. *suiv.*

celerato; la sezione $A\ B$ si abbasserà come in $B\ G$, e seguirà un proporzionato abbassamento nelle sezioni superiori per qualche tratto.

La ragione di quest' acceleramento che suol dirsi *chiamata dello sbocco* non è difficile ad intendere. Poichè nella sezione $A\ B$ l'acqua non trovando più alcun contrasto, comincierebbe ad accelerarsi liberamente per la propria gravità, e però, oltrepassata la sezione $A\ B$, non potrebbe più esercitare pressione alcuna. Quindi la sezione $A\ B$ non sarebbe punto premuta dall' acqua anteriore, mentre dall' acqua posteriore del fiume sarebbe tuttavia premuta (226) quanto porta l' altezza del livello $A\ T$. Prevalendo adunque la pressione del fiume a quella dell' acqua anteriore, è forza che il corso s' acceleri, e la sezion dello sbocco s' abbassi, calando nello stesso tempo le sezioni superiori per qualche tratto. Il quale effetto continuerà sintanto che il pelo di tutta la corrente avrà preso quella positura $F\ G\ H$, per cui nella sezione $B\ G$ si ricomponga l' equilibrio fra la pressione dell' acqua posteriore $F\ G$, e dell' anteriore $G\ H$.

276. *Scolio I* Accaderà lo stesso, quand' anche il livello $b\ r$ del recipiente incontrasse la sezione $A\ B$ in qualche punto intermedio fra A e B. Se non che la chiamata

dello sbocco sarà minore, pel contrasto che fa la pressione del recipiente sotto l' altezza del livello $b r$ alla pressione dell' acqua del fiume, che sempre corrisponde all' altezza del livello $A T$.

277. *Scolio II.* Ognun vede che la teoria del moto lineare non può servire a determinare il moto accelerato nel tratto a cui si estende la chiamata dello sbocco, come nè anche il limite di questo tratto. Poichè non si può già prescinder quivi dall' azione della gravità nel senso normale alla direttrice, essendo anzi quest' azione la causa principale del fenomeno. Nè maggiore ajuto ci danno le osservazioni che troppo scarse ed imperfette abbiamo in questa materia.

278. *Scolio III.* Dalle cose dette s' intendono agevolmente tutte le vicende alle quali soggiace il corso del fiume in vicinanza dello sbocco, secondo il vario stato o del recipiente, o del fiume stesso. E si vede 1.° Che il rigurgito diminuisce l' inclinazione del pelo del fiume, e pel contrario la chiamata dello sbocco l' accresce. 2.° Che il pelo delle piene è sempre più inclinato in vicinanza dello sbocco, che non è il pelo dell' acqua bassa. 3.° Che il crescer del fiume verso lo sbocco non dà regola per conchiudere il suo alzamento nelle parti superiori: poichè se l' acqua crescerà per alza-

mento del recipiente, si eleverà più verso lo sbocco che nei tronchi superiori; se crescerà per una piena del fiume, avverrà tutto l' opposto.

CAP. XXXI.

Delle irregolarità del letto.

279. Ponghiamo che la sezion regolare d' un fiume per un ostacolo qualunque venga a ristringersi, e cerchiamo come per questo ristringimento sia per alterarsi il corso naturale del fiume. Nella quale ricerca distingueremo due casi. Poichè o l' ostacolo obbliga l' acqua a passare per una luce determinata e circoscritta; come sarebbe una cataratta che si calasse per di sopra a chiudere da ripa a ripa il canale: ovvero lascia all' acqua del fiume la libertà di formarsi da se la sua sezione col sollevarsi a un certo segno; come sarebbe l' ingombro de' piloni d' un ponte, ovvero una chiusa impostata nel fondo. In ognuno dei due casi deve per la sezione impedita passare tant' acqua, quanta ne passava per la sezion libera. E di qui agevolmente potremo conoscere l' alterazione che fia per seguirne.

280. *Proposizione I.* Se una sezione del

fiume si ristringa col ridursi ad una luce determinata e circoscritta, si alzerà l'acqua superiormente alla sezione impedita. E se dicasi h l'alzamento dell'acqua sopra il suo pelo naturale, ed s l'altezza dovuta alla velocità per la sezion libera, correrà l'acqua per la sezione impedita con velocità dovuta all'altezza $s + h$.

Poichè l'altezza primiera s dovrà crescer di tanto, di quanto cresce l'altezza dell'acqua superiore all'ostacolo sopra l'altezza dell'acqua inferiore. Or quest'accrescimento è $= h$.

281. *Corollario*. Di quì si potrà conoscere l'alzamento h. Pongasi che la cataratta ristringa la sezione nel rapporto di $1 : i$; cosicchè essendo la sezion libera M, sia la sezione ristretta $i\,M$. Sarà la portata della sezion libera $M\sqrt{2gs}$, e quella della sezione ristretta $i\,M\sqrt{2g(s+h)}$. Dovendo queste due portate essere uguali, se ne dedurrà facilmente

$$h = s\left(\frac{1}{i^2} - 1\right)$$

282. *Proposizione II*. Se il fiume si ristringa per un ostacolo che permetta all'acqua di formarsi da se la sua sezione, s'alzerà l'acqua nella sezione impedita. Sia come prima s l'altezza dovuta alla velocità per la sezion libera, e sia $k + h$ l'altezza

della sezione impedita, essendo il tratto k inferiore al pelo naturale della corrente, ed il tratto h superiore ad esso pelo. Correrà l' acqua nella sezione impedita pel tratto k con velocità dovuta all'altezza $s+h$; e pel tratto h con velocità dovuta all' altezza $s+\frac{4}{9}h$.

Poichè all' altezza primiera s dovrà aggiungersi per ciascun punto della sezione l' altezza dell' acqua superiore all' ostacolo sopra l' acqua inferiore. Ora per tutti i punti del tratto k quest' altezza è $=h$; e pel tratto h l' altezza media (134) è $=\frac{4}{9}h$.

283. *Corollario*. Sia L la larghezza della sezione libera, y la sua altezza; l la larghezza della sezione ristretta, e la sua altezza sia come sopra $k+h$. Si troverà come poc' anzi (281) per determinare l' alzamento h l' equazione

$$Ly\sqrt{s}=lk\sqrt{(s+h)}+lh\sqrt{\left(s+\frac{4}{9}h\right)}$$

284. *Scolio I.* Appartiene a questo caso, com' è palese, quello d' una chiusa impostata sul fondo del fiume. La quale se sia tanto alta, che sormonti col suo ciglio il pelo naturale della corrente, sarà $k=0$, e l' altezza dell' acqua sopra il ciglio della

chiusa determinerassi per l' equazione

$$y\sqrt{s}=h\sqrt{\left(s+\frac{4}{9}h\right)}$$

285. *Scolio II.* Nel fissare le dimensioni della sezione ristretta non si vuol dimenticare di avere riguardo alla contrazione che soffre l' acqua nello sbucare da essa. La qual contrazione andrà valutata diversamente secondo la varietà de' casi; poichè può darsi che uno o più lati della sezione ne siano esenti. Come nel caso d' una cataratta calata per di sopra è palese aver luogo la contrazione solamente nell' orlo della cataratta, e non già negli altri tre lati della sezione. Non essendovi regola ben certa per misurare in tutti i casi la quantità della contrazione, converrà contentarsi d' una stima approssimativa.

286. *Scolio III.* Conoscendosi per le regole precedenti l'elevazione dell' acqua sulla sezione impedita, verrà pure a conoscersi l' estensione del rigurgito prodotto dall' impedimento. Giungerà questo sin dove l' orizzontale tirata per la sommità dell' acqua sulla sezione impedita incontra il pelo naturale della corrente.

287. *Scolio IV.* Le tortuosità degli alvei vengono annoverate fra gl' impedimenti che ritardano il corso. Parmi che questa resistenza possa ridursi a quelle che in questo Ca-

po abbiamo considerate. Poichè affacciandosi alla sezione della rivolta le particelle acquee con direzione parallela all' asse del tronco rettilineo superiore, e però obbliqua alla sezione stessa, conserveranno esse per qualche tratto la direzione preconcepita. Così verrà a formarsi nella sezione della rivolta una parzial contrazione, equivalente ad un ostacolo che ristringa la sezione medesima. Se fosse nota la precisa misura di questo ristringimento, si potrebbe calcolare l' elevazione dell' acqua sopra il suo pelo naturale nella rivolta, e nelle sezioni superiori. Ben si vede però che essa tanto sarà più grande, quanto la rivolta è più acuta.

288. *Scolio V.* Conchiuderemo queste poche nozioni sulle resistenze locali coll' avvertire una notabile diversità che corre fra l' effetto di queste resistenze ne' tubi, e ne' canali aperti. Ne' tubi le strozzature, le rivolte, ed altre tali resistenze non ponno scemare la velocità in una sezione senza che la scemino in tutte le altre, onde il loro effetto stendesi necessariamente a tutto il corso pel tubo quant' esso è lungo. Ma negli alvei potendo la sezione aumentarsi a misura che la velocità decresce, l' effetto delle resistenze locali non s' avanza che a qualche tratto di quà e di là dalla sezione

impedita; fuor del quale l'acqua mantiene, o ripiglia ben tosto quel corso che esige la pendenza del suo letto modificata dalle resistenze uniformi. Alla quale essenzialissima differenza non sembra aver posto mente il sig. du Buat, allorchè (a) valuta la resistenza delle sinuosità nello stesso modo e pei tubi, e per gli alvei.

CAP. XXXII.

Come si formino gli Alvei de' fiumi naturali.

289. Sin qui abbiamo considerato gli alvei côn fondo e ripe inalterabili. Ma i piani sui quali prendon corso quelle acque che costituiscono i fiumi naturali, sono formati di materie cedenti, e più o meno proclivi ad essere disunite e trasportate dalla corrente. Altre sono più grevi, come le ghiaje, e le sabbie grosse; altre meno, come le minute arene. Il veloce corso dell' acqua sospinge le prime radente il fondo; solleva le seconde, e miste ed incorporate coll' acqua le trasporta. Ove poi avvenga che la velocità si rallenti, ivi le ghiaje e le sab-

(a) *Princ. d' hydr.* §. 101. *suiv.*

bie grosse si ammucchiano, e il limo e le sotti li arene si depositano sul fondo, e sulle rive. Per tal modo i fiumi naturali si rassettano il proprio letto, ora abbassandolo, ed allargandolo per *escavazione*, ora rialzandolo, e ristringendolo per *interrimento.* La quale operazione allora soltanto ha termine, quando la forza dell'acqua per ismovere le parti del fondo trovasi in equilibrio colla resistenza di queste; ed allora è che l'alveo dicesi *stabilito*.

290. *Proposizione I.* Ogni fiume escavando si diminuisce la pendenza, ed interrendo se l'accresce.

Escava il fiume allorchè corre su d'un piano sì ripido che la sua velocità è superiore alla resistenza delle parti del fondo ad essere staccate e sospinte. Al termine di questo piano cessando questa soverchia velocità, cessa pure il profondamento, così che il punto infimo del piano dee riguardarsi come termine fisso relativamente a tutto il tratto superiore. Il che posto, è palese che quanto più il fiume escaverà, tanto meno declive renderà il fondo.

Similmente il fiume interrisce, allorchè scende per un pendio così dolce che l'acqua movendosi con poca velocità non ha forza di sostenere le torbide. Al termine di questo piano, cessando una tale lentezza di

moto cessa pure l'interrimento; onde quì pure il punto infimo dee riguardarsi come termine fisso relativamente al tratto superiore. Il che posto, si vede che quanto più il fiume riempirà il fondo, tanto più renderallo declive.

291. *Proposizione II.* Gli alvei formati per escavazione giungono necessariamente a stabilirsi così in declività come in larghezza.

Poichè a misura che il fiume escava, va scemando la pendenza (290). Quindi per una parte scema la velocità, e con essa la forza d'escavare. E per l'altra parte collo scemare della pendenza va crescendo la resistenza delle parti del fondo ad essere smosse; poichè è palese che maggior forza richiedesi a spingere uno stesso solido giù per un piano meno declive che non per un piano più ripido. Poichè dunque va scemando la forza dell'acqua, e va crescendo la resistenza del fondo, giungerà quest'ultima a pareggiare la prima; ed allora cesserà l'escavazione, e sarà il fondo stabilito.

Similmente a misura che il fiume corrodendo le rive si allarga, scema la velocità, e la forza dell'acqua. Così questa forza giungerà ben tosto ad uguagliarsi colla resistenza delle rive, ed allora cessando l'allargamento, sarà l'alveo stabilito in larghezza.

292. *Proposizione III.* Gli alvei formati per interrimento giungono anch' essi a stabilirsi così in declività come in larghezza.

Poichè mentre il fiume interrisce, va accrescendosi la pendenza del fondo (290). Quindi crescerà continuamente la velocità, ond' essa giungerà presto o tardi al segno che basta per sostenere le torbide. Ed allora l' interrimento avrà fine, e sarà il fondo stabilito.

E similmente ristringendosi il fiume fra le proprie alluvioni, cresce la velocità, che in breve giungerà a tale da non permetter più la deposizione delle materie terree, e l' ulteriore ristringimento della larghezza, la quale sarà perciò stabilita.

293. *Scolio.* Non solamente i fondi, e le larghezze degli Alvei sono prescritte e determinate dalla natura, ma eziandio le direzioni, e l' andamento delle loro linee. Se una vena d' acqua pullullasse sopra un piano inclinato, non v' ha dubbio ch' essa vi prenderebbe corso secondo la linea della maggiore pendenza, cioè secondo la retta perpendicolare alla comun sezione di quel piano coll' orizzonte. Che se la suddetta vena sbucasse nel piano con direzione obbliqua, essa vi descriverebbe una parabola avente per diametro la retta pocanzi detta, e per tangente la direzione primitiva. Di

quì s' intende quale andamento prenderebbono naturalmente gli alvei de' fiumi scorrendo per un piano, o anche per una serie di piani diversamente inclinati, quando non trovassero resistenze.

Ma le resistenze che incontrano tra via, sia per le uniformi asprezze de' fondi, sia per l' ineguale tenacità delle loro parti, ponno distoglierli in mille guise dalla naturale tendenza. E potrebbon anche deviarne per contraria cagione, come se per esempio s' incontrassero in una o più concavità continuate, per le quali non mancherebbono di prender corso, qualunque fosse la pendenza della contigua campagna.

Ad ogni modo cessando queste cagioni accidentali ripiglierebbe la corrente il naturale andamento, accostandosi sempre più alla linea della maggiore caduta. Ed infatti le linee de' fiumi naturali per la più parte del corso veggonsi tirate per la maggiore declività delle pianure sulle quali scorrono, quantunque per le anzidette cagioni non poche volte se ne disviino.

CAP. XXXIII.

Degli Alvei stabiliti.

294. PROPOSIZIONE *I.* L'alveo stabilito per escavazione avrà tanto minor pendenza, e tanto maggiore larghezza, quanto maggiore sarà la portata del fiume, e quanto minore la tenacità del terreno per cui corre.

In pari circostanze a maggior portata corrisponde maggiore velocità, ed a minor tenacità del suolo corrisponde minore resistenza allo scavamento. Ove dunque la maggiore portata si combini colla minima tenacità, ivi massimo sarà l'eccesso della forza escavante sopra la resistente; e maggior diminuzione di pendenza, e maggiore accrescimento di larghezza occorrerà per pareggiar le due forze, ed ottenere lo stabilimento.

295. *Scolio*. Quì per tenacità del suolo si prende il complesso di tutte le circostanze che avvalorano la di lui resistenza alla corrosione. Perciò quando si tratti d'un fondo composto di parti staccate, come di sassi, ghiaje, o sabbie grosse, in luogo della tenacità propriamente tale dovrà considerarsi il peso assoluto, e specifico di esse parti.

296. *Proposizione II.* L'alveo stabilito per interrimento avrà esso pure tanto minor pendenza e tanto maggiore larghezza, quanto il fiume sarà più copioso d'acque, e men torbido.

Poichè allora sarà più vicino a quel preciso grado di velocità che gli basta a sostenere le torbide. E per giungere a questo grado, minore aumento di pendenza, e minore diminuzion di larghezza gli occorrerà.

297. *Coroll. I.* Correndo un fiume sopra un suolo eterogeneo, il di lui fondo riceverà sempre minore pendenza a misura che la tenacità del suolo andrà scemando.

298. *Coroll. II.* Ingrossandosi un fiume per l'unione di nuove acque, ad ogni influente che riceve, andrà scemando pendenza.

299. *Coroll. III.* Adunque generalmente parlando, il fondo de' fiumi dalla loro sorgente sino alla foce dovrà trovarsi sempre meno declive. Il che in fatti costantemente si osserva.

300. *Coroll. IV.* E poichè in ogni sezione la velocità si mantiene maggiore nella perpendicolare di mezzo, che non è vicino alle sponde, e maggiore alla superficie che presso il fondo; quindi è che le sezioni de' fiumi naturali o siano formate per escavazione o per interrimento, debbono mante-

nersi più profonde nel mezzo e di mano in mano più alte verso le ripe, e le ripe stesse disporsi a scarpa, allargandosi verso la superficie. E così in fatti si osserva generalmente.

301. *Coroll. V.* Se l'ultimo tronco d'un fiume presso la foce è accelerato dalla chiamata dello sbocco, la larghezza delle sezioni andrà per tutto quel tratto aumentandosi sino alla foce. Ed il fondo si renderà sempre meno declive a misura che va crescendo la velocità. Che se prima di arrivare allo sbocco, la velocità sia cresciuta al segno che basti a potere spinger oltre le torbide senza l'ajuto d'alcuna pendenza del fondo, è facile il vedere che da quel punto all'ingiù non potrà stabilirsi l'equilibrio tra la forza della corrente, e la resistenza del suolo, a meno che il fondo non si disponga in una curva concava, rendendosi sempre più acclive verso lo sbocco.

Tale infatti si osserva la disposizione degli ultimi tronchi de' fiumi che metton capo in mare, le piene de' quali corrono alla foce con accelerazione assai rapida.

CAP. XXXIV.

Dei limiti dello stabilimento degli Alvei.

302. Quanto sin quì si è detto suppone un Alveo di corso perenne e di portata invariabile. Ma i fiumi naturali ridondano d'acqua nelle escrescenze, e nelle grandi siccità ne scarseggiano. Ora egli è impossibile che uno stesso alveo sia egualmente stabilito rispetto ai diversi stati ne' quali il fiume in diversi tempi si trova. Per il che si fa luogo alla seguente

303. *Proposizione*. Ne' fiumi di portata variabile, l'alveo si stabilisce entro due termini corrispondenti l'uno alla massima, l'altro alla minima portata del fiume.

Egli è pa'e e che nelle piene il letto del fiume riducesi alla minore pendenza, sia che per escavazione o per replezione si formi. Cessando la piena, ove accada che la velocità resti insufficiente al trasporto delle torbide, ivi comincierà il fiume ad interrire, e poco a poco disporrà il suo alveo a quella maggiore declività che compete alla portata ordinaria. Che se frattanto sopravvenga una nuova escrescenza, si roderanno le posature, e ripiglierà il fiume l'antico fondo. Dal che si vede che il fondo del

fiume in questi tratti non potrà mai dirsi stabilito, se non in quanto si anderà librando tra due termini, l'uno de' quali corrisponde alla portata delle maggiori piene, l'altro a quella delle acque più magre.

304. *Coroll. I.* Perciò se si misurerà la pendenza d'uno stesso tronco di fiume in diversi tempi, potrà questa trovarsi alquanto diversa, secondo il diverso grado delle ultime piene che per esso saranno corse, e secondo l'intervallo di tempo trascorso dall' ultima piena: ma tuttavia tal diversità sarà sempre ristretta entro i limiti indicati nella Proposizione.

305. *Coroll. II.* La portata massima in un dato tronco d'un fiume dee desumersi dal massimo concorso d'acque che vi si può fare per le piene contemporanee di tutti gl' influenti che uniscono le loro acque in quel tronco. Dal che apparisce che le piene non contemporanee de' fiumi confluenti ponno lasciare delle deposizioni, che poi si sgombrino all' arrivo delle piene contemporanee.

306. *Coroll. III.* La piena d'un influente non contemporanea a quella del fiume, rialzerà il letto del fiume superiormente allo sbocco per tutto quel tratto a cui s'estende il rigurgito dell' influente. E similmente venendo il fiume in piena quando

l' influente trovasi magro, ingombrerà colle sue deposizioni l' estremo tronco dell' influente. Questi interrimenti saranno però temporanei, e scompariranno al sopravvevenire delle primè piene,

307. *Coroll. IV.* A simili vicende andranno soggetti gli estremi tronchi de' fiumi che mettono in mare. Nello stato di magrezza, le torbide colle loro deposizioni andranno riempiendo la concavità (301) del letto, e massime quando l' acqua è ritardata dal flusso marino, o da venti contrarj. Ma molta parte di questi accidentali sedimenti sarà riportata al mare in tempo del riflusso; e le sopravvegnenti piene sgombreranno il resto.

LIBRO TERZO

DELLA RESISTENZA DE' FLUIDI.

CAP. I.

Nozioni generali.

308. Opponcasi ad una corrente equabile un solido immobile di qualsiasi forma. Egli è chiaro che quanta sarà la pressione che la corrente esercita contro del solido, tanta sarà la forza che precisamente richiedesi a tener fermo il solido nella sua positura; o sia in altri termini, tanta sarà la *Resistenza del solido* al moto della corrente.

In un fluido quieto movasi equabilmente un solido di qualunque forma. Qui pure è palese che quanta sarà la pressione del fluido ambiente sul solido, tanta sarà la forza richiesta per conservare al solido stesso il suo equabile movimento; ovvero in altri termini, tanta sarà la *Resistenza del fluido* al moto del corpo.

309. Adunque in entrambi i casi si conoscerà la resistenza tanto solo che si conosca

la pressione del fluido contro del solido. E questa si saprebbe agevolmente, se potesse conoscersi il moto che prende il fluido tutto all' intorno del corpo che percuote, o a cui resiste; poichè le stesse formole determinatrici del moto involvon anche la determinazione della pressione. Or quì è che s' incontra una difficoltà pressoche insuperabile. Ben si sa, che dall' incontro del corpo le particelle fluide si disviano, e lambendone i fianchi vanno poscia a ricongiungersi dietro ad esso; ma nè veruna teoria potrebbe forse determinare, nè la sperienza sino ad ora ha mostrate le circostanze di questo moto, e tutti gli elementi che concorrono a variarlo.

310. Essendo dunque chiusa alle nostre ricerche la via diretta che dovrebbe condurci alla soluzion del problema, conviene per necessità tenere altra strada. Questa sarà di fingersi da prima una qualche ipotesi, comunque imperfetta, e veder poscia col confronto delle sperienze di rettificarla ove sia d' uopo, e di compierla. Noi esporremo le principali Teorie sin quì immaginate. Poi percorrendo que' casi ne' quali più spesso cade il bisogno di misurare la resistenza, procureremo di trarre dalle sperienze que' canoni più sicuri che supplir possano in qualche parte al difetto delle Teorie.

Premetteremo frattanto il seguente general Teorema.

311. *Proposizione*. Se il fluido corra equabilmente con velocità V, ed il solido si muova nella stessa direzione con velocità u, sarà la resistenza qual sarebbe se il solido fosse fermo, ed il fluido corresse colla sola velocità $V-u$.

Poichè egli è evidente che imprimendosi un moto comune a tutte le parti d'un sistema, la pressione non cangia punto. Fingasi dunque impressa al fluido insieme ed al solido la velocità u in direzione contraria all'attuale. Il solido resterà fermo, ed al fluido non rimarrà che la velocità $V-u$. Dunque ec.

312. *Corollario*. La resistenza del solido al fluido che corra con velocità u non è punto diversa dalla resistenza del fluido al solido che cammini colla medesima velocità u.

Poichè l'una resistenza si cangia nell'altra, coll'imprimere a tutto il sistema una velocità comune u in direzione contraria all'attuale.

Vedremo infatti che le sperienze non mostran divario fra l'una, e l'altra resistenza. Quindi è che nel cercare il valore della resistenza potremo indifferentemente supporre l'un dei due casi distinti all'art. 308.

CAP. II.

Teoria di Newton.

313. Fingesi che quando una corrente equabile urta un piano, tutte le fila d'acqua che si trovano nell' indirittura del piano, vadano successivamente ad incontrarlo, estinguendosi con quest' urto la loro velocità normale al piano stesso. Quanta è la forza perduta dalle particelle che nell' unità di tempo sono così fermate dal piano, tanta stimasi essere la forza dell' urto, e conseguentemente la resistenza. È questo il fondamento della Teoria che prendiamo a spiegare. Ben si vede che un tale concetto non può rigorosamente ammettersi; poichè converrebbe supporre che le prime particelle dopo toccato il piano, scomparissero, per dar luogo alle seguenti d' arrivarvi senza impaccio. Pure nelle difficoltà che impediscono la soluzione diretta del Problema, non è disdetto (310) di giovarci d' ipotesi comunque difettose.

314. *Proposizione I.* La resistenza d' un piano urtato direttamente dal fluido è uguale al peso d' un prisma dello stesso fluido avente per base il piano, e per altezza il

doppio di quella che è dovuta alla velocità del fluido.

Sia l' area percossa A, la densità del fluido q, ed s l'altezza dovuta alla sua velocità u. La massa del prisma fluido che nell' unità di tempo va a percuotere il piano è palesemente $= q\,A\,u$, e ciascuna particella vi perde la velocità o sia (I. 10) la forza u. Onde la somma delle forze perdute nell' incontro del piano è $= q A u^2 = 2\,g q A s$; che è appunto il peso etc.

Di qui avanti esprimeremo per l' unità la densità del fluido; onde l' espressione della resistenza diretta R sarà

$$R = 2\,g\,A\,s \;; \quad \text{ovvero } R = A\,u^2.$$

315. *Proposizione II.* La resistenza d' un piano urtato obbliquamente dal fluido coll' angolo d' incidenza k, è uguale allo stesso prisma di prima, moltiplicato per $\sin. k^2$. Cioè

$$R = 2\,g\,A\,s \sin. k^2 \;; \text{ ovvero } R = A\,u^2 \sin. k^2.$$

Risolvesi la velocità u nelle due, $u \cos. k$ parallela al piano, ed $u \sin. k$ normale al piano stesso. Colla prima il fluido non percuote il piano, colla seconda lo urta direttamente. Dovremo dunque nella formola dell' articolo precedente in luogo di u porre $u \sin. k$: onde etc.

316. *Coroll. I.* Questa resistenza $A\,u^2 \sin. k^2$ si esercita in direzione normale al piano

percosso. Si può essa decomporre in due forze; l'una nella direzione della velocità u, la qual sarà $A u^2$ sin. k^3; l'altra in una direzione perpendicolare alla prima, la qual sarà $A u^2$ sin. k^2 cos. k. Adunque la resistenza del piano valutata secondo la direzione colla quale il fluido l'incontra, esprimesi per $A u^2$ sin. k^3.

317. *Coroll. II.* Generalmente la resistenza d'un piano percosso dalla corrente è proporzionale 1.° all'area del piano. 2.° al quadrato della velocità. 3.° al quadrato del seno dell'angolo d'incidenza.

Le due Proposizioni spiegate contengono la Teoria Neutoniana. Veggiamone ora le principali applicazioni.

318. *Proposizione III.* Sulla base $R A R'$ (Fig. 9) simmetrica attorno l'asse $A Q$ ergasi un cilindroide retto percosso dalla corrente colla direzione $A Q$. Cercasi l'espressione della resistenza valutata secondo questa stessa direzione.

Sia $A P = x$, $P M = y$, l'arco $A M = s$. Cerchiamo da prima la resistenza della zona elementare avente la base $R A R'$, e l'altezza infinitesima $Q h = d z$. Questa sarà la somma delle resistenze che soffre nella direzione $A Q$ ciascuno de' suoi elementi. Consideriam dunque il rettangolo elementare che ha per base $M m = d s$, e per altezza $d z$.

L' area di questo rettangolo è $= ds\, dz$; e l' angolo d' incidenza $m\,M\,r$ sotto cui vien percosso, ha per seno $\frac{m\,r}{M\,m}$ o sia $\frac{dy}{ds}$. Sarà dunque la resistenza elementare (316) $ds\,dz\,.\,u^2\,.\,\frac{dy^3}{ds^3}$. S' integri quest' espressione (riguardando dz come costante) da $x = 0$, sino ad $x = AQ$. L' integrale raddoppiato darà la resistenza dell' intera zona elementare. Poscia integrando questa rapporto alla z, e prendendo l' integrale da $z = 0$ sino a $z = QH$, si avrà la resistenza dell' intero cilindroidé.

Niente vieta di prendere per origine delle ascisse in vece di A il punto Q, o qualunque altro torni più comodo.

319. *Coroll. I.* Sia $R\,A\,R'$ un triangolo isoscele; coll' indicata traccia si troverà la resistenza $= u^2\,.\,R\,R'\,.\,Q\,H\,.\,\text{sin.}\,Q\,A\,R'^3$. Laonde la resistenza d' una prora a base triangolare si ottiene moltiplicando la resistenza della faccia rettangola $R\,S$ per sin. $Q\,A\,R'^3$. Così se il triangolo $R\,A\,R'$ fosse rettangolo in A, la resistenza della prora non sarebbe che la metà di quella del rettangolo $R\,S$.

Quindi il seguente Teorema. Se un parallelepipedo rettangolo di base quadrata espongasi alla corrente prima col suo spigolo, cioè nella direzione della diagonale della

base, poi con una delle sue facce, sarà la prima resistenza alla seconda come il lato alla diagonale, o sia come $1:\sqrt{2}$.

320. *Coroll. II.* Sia RAR' un semicircolo; riuscirà la resistenza $= \frac{2}{3} u^2 . RR' . QH$. Laonde la resistenza d'un cilindro retto percosso dall'acqua perpendicolarmente al suo asse vale due terzi della resistenza che proverebbe la sezione RS fatta per l'asse.

321. *Proposizione IV.* Il solido prodotto dalla rotazione della curva AMR (Fig. 10) attorno l'asse AQ, sia urtato dal fluido nella direzione dell'asse medesimo. Cercasi la resistenza valutata secondo questa direzione.

Sia come prima $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$. La zona elementare $2\pi y ds$ nata dalla rotazione dell'archetto Mm è tutta percossa coll'angolo d'incidenza rMm, che ha per seno $\frac{dy}{ds}$. Sarà dunque la resistenza di quella zona (316) $u^2 . 2\pi y ds . \frac{dy^3}{ds^3}$. Integrando quest'espressione da $x=0$ sino ad $x=AQ$, si avrà la total resistenza.

322. *Coroll. I.* La resistenza d'un cono retto battuto dall'acqua nella direzione dell'asse AQ, si ottiene moltiplicando la resistenza della sua base ROR' per sin. QAR^2.

323. *Coroll. II.* La resistenza d'una sfera vale la metà della resistenza che proverebbe il suo circolo massimo.

324. *Scolio.* Oltre l'intrinseco difetto che notammo sin da principio (313) nella Teoria testè spiegata, non è difficile lo scorgere che essa trascura diversi elementi che pur debbono influire nel valore della resistenza. Poichè in primo luogo allorchè il solido è per ogni parte attorniato dall'acqua, è forza che la sua parte posteriore soffra anch'essa una pressione, la quale dovrebbe detrarsi da quella esercitata contro la parte anteriore, per avere la giusta misura della pression totale. Quindi se non altro dee nascere che il valore assoluto della resistenza assegnato dalla Teoria risulti maggior del vero, comunque le proporzioni fra le diverse resistenze possano per avventura rimanere le stesse.

In secondo luogo allorchè il solido sporge fuori dell'acqua, si osserva una notabile alterazione nel pelo della corrente, che si gonfia e si solleva contro la faccia anteriore del corpo, e s'abbassa dietro il medesimo. E di qui pure non può a meno che il valore della resistenza non soffra qualche mutazione.

Sarebbe dunque necessario il porre a calcolo 1.° la quantità e l'effetto della pres-

sione esercitata sulla faccia posteriore del corpo 2.° la quantità e l'effetto dell' alterazion di livello che si manifesta nel pelo naturale della corrente.

Di queste due circostanze tien conto la nuova Teoria di D. Giorgio Juan, che nel seguente Capo esporremo.

C A P. III.

Teoria di Juan.

325. PROPOSIZIONE I. Trovare la resistenza d' un picciol piano m, immerso sotto l'acqua ad altezza h, e percosso direttamente con velocità u.

Se l'acqua fosse stagnante, il piano m ne soffrirebbe una pressione (40) $= q g m h$. E la velocità virtuale dell' acqua contigua al piano, cioè la velocità con cui l'acqua stessa tende a passare pel piano, sarebbe (105) dovuta all'altezza h. Chiamando U questa velocità virtuale, sarà dunque $h = \frac{U^2}{2g}$.

Quindi la pressione può esprimersi ancora per $q g m \cdot \frac{U^2}{2g}$ o sia per $\frac{1}{2} q m U^2$.

Ora oltre la velocità virtuale U l'acqua si suppone animata dalla velocità attuale

u. Assume Juan, che la pressione che ha luogo nello stato di quiete si cangi in quella che compete allo stato di moto, tanto solo che in vece della velocità U si prenda la somma delle due velocità $U + u$. Il che posto, sarà la pressione contro la faccia anteriore del piano $= \frac{1}{2} q m (U + u)^2$.

Allo stesso modo la pressione contro la faccia posteriore del piano corrisponderà alla velocità $U - u$; poichè quivi la velocità attuale u ha direzione contraria alla virtuale U; e perciò sarà la pressione $= \frac{1}{2} q m (U - u)^2$.

Sottraendo questa seconda pressione dalla prima, risulterà il valore della total pressione, o sia della resistenza cercata. E fatto $q = 1$, sarà $R = 2 m U u$; ovvero

$$R = 2 m u \sqrt{2 g h}.$$

326. *Coroll. I.* Se l' urto è obbliquo coll' angolo d' incidenza k, in luogo di u converrà porre (315) u sin. k; e sarà

$$R = 2 m u \text{ sin. } k \sqrt{2 g h}.$$

Questa medesima sostituzione dovrà pur farsi in tutte le seguenti formole di questo Capo, qualora invece della percossa diretta suppongasi la percossa obbliqua.

327. *Coroll. II.* Adunque la resistenza d' un

picciol piano secondo questa Teoria è proporzionale 1.° alla sua area. 2.° alla velocità. 3.° al seno dell' angolo d' incidenza. 4.° alla radice quadrata della profondità alla quale è sommerso il piano.

328. *Coroll. III.* Trovata la resistenza d'un piano elementare, è aperta la via a trovar quella d'una superficie qualunque piana, o curva. Diamo un facile esempio col ricercare la resistenza diretta del rettangolo $EFG'H$ (Fig. 11) tutto sepolto sotto l'acqua col lato orizzontale EF distante dal livello AB per l' altezza $AE = m$. Sia $EH = a$, $EF = b$, $EP = x$, $AP = m + x$. La resistenza del rettangolo elementare $PMmp = bdx$, sarà (325) $2budx\sqrt{2g(m+x)}$. S'integri quest' espressione da $x = 0$, sino ad $x = a$; e sarà la cercata resistenza

$$\frac{4}{3} bu\sqrt{2g} . \left\{ (m + a)^{\frac{3}{2}} - m^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

329. *Coroll. IV.* Se il piano fosse collocato col suo lato superiore a fior d'acqua, sarebbe $m = 0$, onde la resistenza $= \frac{4}{3} abu\sqrt{2ga}$. E nella stessa ipotesi se il piano cangiasse positura, e fosse ora b il lato verticale, ed a il lato orizzontale, diverrebbe la resistenza $= \frac{4}{3} abu\sqrt{2gb}$.

Onde la resistenza nel primo caso sarebbe a quella del secondo come $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. E così se un lato del piano fosse quadruplo dell'altro, posto il piano col lato più lungo verticale, soffrirebbe urto doppio di quel che soffre posto col lato più lungo orizzontale. Nella Teoria Neutoniana l'urto sarebbe in ambi i casi lo stesso.

330. *Coroll. V.* Siano due rettangoli simili esposti alla corrente coll'orlo superiore a fior d'acqua; e sia la proporzione de' loro lati $1 : 2$. Sarà la proporzione delle resistenze $1 : n^2 \sqrt{n}$. Nella Teoria Neutoniana questa proporzione sarebbe $1 : n^2$.

331. *Coroll. VI. Centro della resistenza* in un piano urtato dalla corrente *dicesi quel* punto per cui passa la risultante *di* tutte le pressioni esercitate sopra ciascuno de' suoi elementi. Qui pure apparisce notabile discrepanza fra la Teoria di Neuton, e quella di Juan. Nella prima tutte le pressioni sopra eguali elementi essendo eguali, il centro della resistenza coincide col centro di gravità del piano. Nella seconda le pressioni divenendo maggiori a maggiore profondità, il centro della resistenza cadrà più basso. La sua posizione si avrà (I. 48) col dividere la somma de' momenti delle pressioni elementari per la somma delle pressioni stesse, o sia per la resistenza totale del pia-

no. Così nel rettangolo coll' orlo a fior d'acqua si troverà il centro della resistenza ai tre quinti dell'asse contati dalla cima.

332. *Proposizione II.* Oppongasi alla corrente un corpo sporgente fuori dalla medesima. Alzandosi il pelo della corrente davanti al corpo, ed abbassandosi dietro esso, vuolsi determinare la quantità di questo alzamento, ed abbassamento.

Dovrà il fluido davanti al corpo sollevarsi di tanto quanto basta perchè s' estingua la velocità attuale u; poichè allora nel colmo del fluido sarà $U + u = o$, e si annullerà la pressione. Ora a tal uopo bisogna che il fluido salga di tanto quanta è l'altezza dovuta alla velocità u. Di tanto dunque sarà l'intumescenza alla parte anteriore del solido.

Similmente dietro al solido l'acqua dovrà discender tanto quanto basta per acquistare la velocità u; poichè allora nella superficie del fluido sarà $U - u = o$, e quindi nulla la pressione.

333. *Coroll. I.* Tanta dunque sarà l'intumescenza davanti al solido, quanta la depressione dietro di esso; entrambe eguali ad $\frac{u^2}{2g}$.

334. *Coroll. II.* Per tale alterazion di livello crescerà la pressione sulla faccia anteriore del corpo, e scemerà sulla posteriore.

Sia la faccia anteriore un piano rettangolo, e supponghiamo che il pelo naturale AB della corrente si alzi in QR; sarà (333) $AQ = \frac{u^2}{2g}$.

Consideriamo ora il rettangolo $LGgl = bdx$, fatto $AL = x$: la total velocità con cui sarà quell' elemento percosso, è $= u - \sqrt{2gx}$, e quindi è la sua pressione $= \frac{1}{2} bdx(u - \sqrt{2gx})^2$. Integrando, e poi compiendo l'integrale col fare $x = AQ$, si troverà la pressione addizionale sostenuta dalla parte sporgente $AQRB = \frac{bu^4}{24g}$.

Passando ora a considerare la faccia opposta del solido, supposta anch' essa rettangolare, si troverà similmente che la pressione vien diminuita d' un egual quantità $\frac{bu^4}{24g}$.

335. *Proposizione III.* Trovare la resistenza d'un parallepipedo rettangolo percosso direttamente dalla corrente, e sporgente fuori della medesima.

Se questo solido radesse coll' orlo superiore il pelo della corrente, sarebbe la resistenza (329) $\frac{4}{3} abu\sqrt{2ga}$. Ora in gra-

zia dell' alterazion di livello cresce la pressione anteriore, e scema la posteriore di $\frac{bu^4}{24g}$. Adunque la pression totale crescerà del doppio, o sia di $\frac{bu^4}{12g}$, e sarà la resistenza

$$\frac{4}{3}abu\sqrt{2ga}+\frac{1}{12}\cdot\frac{bu^4}{g}.$$

336. *Scolio I.* Son questi i principali fondamenti e risultati della Teoria di Jnan. Noi non seguiremo più oltre l' Autore nel tener conto ch' ei fa della lunghezza del solido, e dell' influsso di questa nel mutare il valore della resistenza; da ciò distogliendone non tanto la complicazione de' calcoli, quanto il poco fondamento de' principj (a) coi quali egli procede a questa ricerca. Ci contenteremo di enunciare il risultáto principale del suo calcolo (b).

Il parallepipedo considerato all' articolo precedente, se avrà lunghezza eguale, o comunque maggiore di u, sosterrà quella resistenza che ivi abbiamo trovata. Ma se sarà più corto, il valor della resistenza cangierà sensibilmente, di modo che se la lun-

(a) *V. Juan Examen Maritimo. Lib. II. Prop.* 19, 46, 47.

(b) *ibid. Prop.* 52.

ghezza svanisce, riducendosi il solido ad una lastra sottile, la resistenza diviene

$$\frac{2}{3} a b u \sqrt{2 g a} + \frac{1}{2} a b u^2 + \frac{b u^4}{24 g}.$$

Quindi se la velocità sia molto piccola, la resistenza della lastra non è che la metà di quella del parallelepipedo.

337. *Scolio II.* I principj sui quali è fondata la prova delle proposizioni esposte agli articoli 325. 332. anch' essi debbon tenersi in conto di pure ipotesi. Colla stessa traccia tenuta all' art. 325, e con supposti niente meno probabili di quelli di Juan, il Sig. Romme (a) è stato ricondotto ai risultati della Teoria Neutoniana. Ecco il di lui raziocinio.

Essendo l' acqua stagnante, la pressione sul picciol piano m sarebbe $q g m h$, ove h è l' altezza del fluido sovrastante, cioè l' altezza dovuta alla velocità virtuale U. Sia ora s l' altezza dovuta alla velocità attuale u. Siccome dalla velocità virtuale U nasce la pressione $q g m h$, così dall' attuale u nascerà la pressione $q g m s$. Quindi la pression totale dell' elemento m sarà $q g m (h+s)$: e quella esercitata contro la faccia posteriore riuscirà similmente $q g m (h-s)$: e la

(a) *Art de la marine. Roch.* 1787.

differenza, o sia la resistenza del piano sarà $=2qgms$; che è per l'appunto (314) il valore datoci della Teoria di Neuton.

Ritengasi adunque la Teoria di Juan siccome un ipotesi, nulla meno che la precedente. Sarà della sperienza il decidere qual delle due s'avvicini di più alla vera legge della natura.

CAP. IV.

Sperienze sull' urto d'una vena d'acqua contro una lastra.

338. Riportandoci ora alle sperienze; noi le distingueremo in tre classi per tre distinti casi che nella resistenza de' fluidi ponno aver luogo. Il primo caso è quando una vena fluida percuote un piano e sfugge dopo l'urto liberamente. Questo caso ha ciò di particolare, che dietro il piano non v'ha pressione che controbilanciar possa l'urto anteriore.

339. *Sperienza*. A capo del braccio d'una bilancia si saldi una lastra, equilibrandone il peso nell'altro braccio. Esposta poi questa lastra al colpo della vena fluida, dall' altra parte s'aggiunga quel peso che basta per tenerla ferma contro l'urto in positura

normale, o comunque obbliqua alla vena urtante. Da questo peso si avrà la misura dell' urto. E quì si potranno variare a piacere le velocità della vena, le ampiezze della lastra, e gli angoli d' obbliquità.

Le prime prove che a questo modo si fecero, riuscirono così discordi da non poterne conchiuder nulla. Ma gli esperimenti colla maggiore accuratezza istituiti da Bossut, (*a*) ed ultimamente da Zuliani (*b*) hanno posto fuori di controversia le seguenti leggi.

340. *Coroll. I.* In pari circostanze gli urti delle vene fluide sono come i quadrati delle velocità.

341. *Coroll. II.* Gli urti obbliqui non seguono, nè la ragione duplicata, nè la semplice de' seni d' incidenza. Almeno l' urto con obbliquità di 60° (giacchè in altre obbliquità non se n' è fatta prova) riuscì costantemente minore di quel che porterebbero quelle ragioni.

342. *Coroll. III.* La misura assoluta dell' urto diretto soggiace a grandi varietà secondo la proporzione dell' ampiezza della lastra alla sezione della vena urtante. Se la lastra sopravanza notabilmente la sezion della vena, la sua resistenza eguaglia il peso d' un

(a) *Hydrodyn.* §. 745 *etc.*

(b) *Mem. dell' Accad. di Padova. Tom. III.*

cilindro acqueo avente per base la sezion della vena, e l'altezza doppia di quella dovuta alla velocità, conformemente all'art. 314. Ma se la lastra è più angusta, l'urto è minore; e quando eguaglia o di pochissimo eccede la sezion della vena, l'urto non è più che il peso di un cilindro della stessa base, e dell'altezza dovuta alla velocità. Fra questi due limiti è contenuta la misura dell'urto in tutti i casi.

343. *Scolio I.* Dobbiamo al Sig. Zuliani l'osservazione di quest'ultima legge, la qual ci rende ragione delle diversità che prima s'incontravano nella misura dell'urto. Egli ha ancora osservato con molta diligenza lo sfiguramento della vena allo scontro della lastra. Essa si allarga, e le particelle fluide divergon dall'asse piegando per canali di maggiore o minor curvatura secondo la maggiore o minore ampiezza della lastra. Nelle lastre anguste, le particelle esterne della vena debordano dagli orli con notabile obbliquità, di modo che fanno un angolo assai grande col piano urtato; ma nelle lastre maggiori, quell'angolo sempre più s'impiccolisce, a segno che in ultimo l'acqua è obbligata a piegare in direzioni parallele alla lastra medesima. Egli è allora che l'urto arriva al peso del cilindro avente altezza doppia di quella dovuta alla ve-

locità; oltre questo limite l' ulteriore ingrandimento della lastra più non accresce la resistenza.

344. *Scolio II.* Egregiamente concorda con questi fenomeni una bella Teoria proposta dal Sig. la Grange (a) per questo genere di resistenza. Rappresenti la fig. 12 la sezione della vena fatta pel suo asse MN; onde sia la vena stessa il solido nato dalla rotazione della curva ALX, e la lastra PQ un cerchio del raggio NP. Sia M il punto dove comincia la vena ad allargarsi. Si può intendere che le particelle si disviino pel canale formato dalla rotazione dell' arca $AMPX$, cosicchè rimanga nel mezzo il conoide PMQ d'acqua stagnante; il quale con quanta forza è premuto dall'acqua che gli corre attorno, con altrettanta premerà la lastra PQ sulla quale s'appoggia. Quanto alla velocità con cui l'acqua corre tutto all' intorno del conoide PMQ, questa si può supporre costante, ed eguale a quella della vena, non apparendo ragione per cui debba cangiarsi.

Ciò posto sia A la sezione AMB della vena, u la sua velocità costante; e riferendo la curva MHP all'asse MN, sia $MG = x$, $GH = y$, l'arco $MH = s$; la larghezza del

(a) *Mem. de Turin.* 1784. 1785.

canale in H, o sia $HL = z$; il raggio osculatore della curva MHP nel punto H dicasi $= R$; e finalmente l'angolo NPT dell'obbliquità con cui le particelle escono dall'orlo della lastra dicasi $= \Phi$.

Essendo la velocità costante per ipotesi, sarà costante ancora la sezione (89); perciò la sezione AMB sarà eguale all'area nata dalla rivoluzione della linea HL; o sia $A = 2\pi y z$.

Considerando ora l'armilla nata dalla rotazione del rettangolo elementare $HhlL$, il suo volume è $= 2\pi y z ds$, e la sua parete interna prodotta dalla rotazione dell'archetto Hh è $= 2\pi y ds$. Ogni elemento del fluido contenuto nella suddetta armilla preme la parete colla sua forza centrifuga, espressa (I. 227) da $\frac{u^2}{R}$. Quindi la total pressione contro la parete anzi detta sarà $= \frac{u^2}{gR} \cdot 2\pi y z ds$; cioè eguale al peso d'un cilindro che avendo per base la parete stessa $2\pi y ds$ avrà per altezza $\frac{u^2 z}{gR}$. Quindi ancora ogni punto della lastra PQ soffrirà una pressione rappresentata dalla stessa altezza $\frac{u^2 z}{gR}$; la qual pressione se facciasi $= P$

avrem dunque $P = \frac{u^2 z}{g R}$.

Pongasi in luogo di z il suo valore $\frac{A}{2 \pi y}$, ed in luogo di R il suo valore $\frac{-d y}{d . \frac{d x}{d s}}$: verrà l'equazione

$$2 \pi g P y d y = - A u^2 d . \frac{d x}{d s}$$

che integrata ne dà

$$\pi g P y^2 = \text{cost} - A u^2 . \frac{d x}{d s}.$$

Quando $y = 0$, si ha $\frac{d x}{d s} = 1$, e quando $y = PN$, si ha $\frac{d x}{d s} = \text{sin.} \Phi$. Di quì determinata la costante, si ottien l'equazione

$$\pi g P . PN^2 = A u^2 (1 - \text{sin.} \Phi)$$

Or la resistenza della lastra è per l'appunto il peso d'un cilindro che avendo per base la lastra stessa $\pi . PN^2$ abbia per altezza P. È dunque la resistenza cercata $= A u^2 (1 - \text{sin} \Phi)$.

Di qui si scorge come a misura che l'angolo Φ va decrescendo, facciasi la resistenza sempre maggiore; divenendo massima, ed eguale ad $A u^2$, quando $\Phi = 0$, o sia quando le particelle sfuggono dal piano del-

no della lastra con direzioni ad esso piano parallele; il tutto a seconda de' fenomeni di sopra (343) osservati.

CAP. V.

Sperienze sulla resistenza ne' fluidi indefiniti.

345. Riguardasi come indefinita l' ampiezza del fluido, allorquando l' ostacolo non ristringe notabilmente la sezione; poichè allora la perturbazione del fluido circostante non si propaga, almeno in modo sensibile, alla sezione intera. La maggior parte delle sperienze che abbiamo sulla resistenza de' fluidi si riferiscono a questo caso. Fra le quali tiene il primo luogo quella serie che da' Signori Alembert, Condorcet e Bossut ne fu fatta (*a*) nel 1775. e continuata poscia dal Sig. Bossut (*b*) nel 1778.

346. *Sperienza I.* Furono preparati diversi battelli di varie grandezze, aventi forma di parallelepipedo rettangolo. Ciascun di questi veniva tratto con una fune orizzon-

(a) *Nouv. Expériences sur la résistance des fluides. Paris.* 1777.

(b) *Mem. de l' Acad. des Sc.* 1778.

tale per uno stagno d'acqua estesissimo. All'estremità dello stagno la fune passando per una girella si rivolgeva all'insù per tanta altezza quant'era lunga la corsa del battello; indi per mezzo d'altra girella si ripiegava ingiù, e portava attaccato un peso, il quale col suo discendere traeva la fune, e con essa il battello. Il moto di questo sul principio era accelerato, ma diveniva equabile tosto che la velocità era cresciuta al segno che la resistenza eguagliasse il peso motore. Con un orologio a mezzi secondi notavasi il tempo in cui veniva trascorso ciascuno degl'intervalli eguali ne' quali si era divisa la lunghezza della vasca; e così vedeasi per qual tratto il movimento fosse equabile, e qual ne fosse la velocità.

Adoprando diversi parallelepipedi, o anche lo stesso con diverso carico, così che più o meno pescasse nell'acqua, s'andavano variando le superficie percosse. E coll'adoperare diversi pesi motori, si variavano ancora le velocità. In ogni sperienza poi la misura della resistenza si avea dal peso motore medesimo, detraendone quella picciola parte che impiegavasi a vincer l'attrito delle due girelle, ed altre tenui resistenze.

347. *Sperienza II.* Servì a questa Sperienza un battello simile a quelli della prece-

dente; se non che la faccia anteriore si ricoperse successivamente con varie prore prismatiche, aventi per base un triangolo isoscele cogli angoli al vertice sempre più acuti, cominciando dall' angolo di 168° e procedendo sino a quello di 12° con differenze eguali di dodici gradi. Quì adunque la percossa era obbliqua. Nel resto la sperienza eseguivasi, e si misurava la forza dell' urto come prima.

Ecco i risultati che da grandissimo numero di prove furon raccolti.

348. *Coroll. I.* Così negli urti diretti, come negli obbliqui, in pari circostanze la resistenza cresce come il quadrato della velocità.

Tenendo dietro alle minime differenze, sembrò veramente che la resistenza crescesse in ragione alquanto maggiore della duplicata delle velocità; il che forse vuolsi ripetere dall' intumescenza che davanti la prora si forma, e che nelle maggiori velocità è maggiore. Se il solido fosse totalmente sott' acqua, forse che la legge de' quadrati delle velocità tornerebbe esattissima.

349 *Coroll. II.* Negli urti diretti, a velocità eguale, la resistenza è proporzionale alla superficie percossa.

Quì pure s' incontra qualche picciola anomalia. Poichè se le superficie differiscono

soltanto in larghezza, l'urto cresce un po' più che non fanno le superficie; e se differiscono soltanto in altezza, avviene il contrario. Quest' anomalia dipende anch' essa da quella resistenza addizionale che proviene dall' intumescenza dell' acqua avanti la prora; la quale intumescenza si osservò infatti crescere in ragion maggiore della ragione delle larghezze, e minore di quella delle altezze.

350. *Coroll. III.* La misura assoluta dell' urto diretto contro un piano eguaglia il peso d' un prisma d' acqua avente per base quel piano, e l' altezza dovuta alla velocità. Il qual valore non è che la metà di quello che la Teoria Neutoniana (314) assegnava.

351. *Coroll. IV.* Gli urti obbliqui non servano nè la ragion duplicata de' seni d' incidenza, come richiederebbe la Teoria di Neuton; nè la ragion semplice di essi seni, come vorrebbe la Teoria di Juan. Seguon essi altra legge, tuttavia sconosciuta.

352. *Coroll. V.* Questa legge hanno procurato scoprire parecchi Autori, almeno empiricamente, componendo una formola che fedelmente rappresentasse il risultato delle sperienze. Il Sig. Bossut esprimendo col numero 10000 la resistenza diretta, esprime la resistenza sotto l' angolo d' incidenza k colla

formola seguente

$$10000 \sin. k^2 + 0{,}003\,(90^\circ - k)^{2,25}$$

Ed il Sig. Romme propone a tal uopo quest' altra formola

$$10000 \,.\, 30 \,.\, \frac{2 + \sin. k^2}{180^\circ - k}$$

353. *Coroll. VI.* La Tavola seguente pone sott' occhio il confronto della sperienza colle Teorie, e colle formole mentovate ne' due articoli precedenti.

Angolo d' incidenza	*Resistenza osservata*	*Teoria di Neuton*	*Teoria di Juan*	*Formola di Bossut*	*Formola di Romme*
90°	10000	10000	10000	10000	10000
84	9893	9890	9945	9891	9341
78	9578	9568	9782	9578	8696
72	9084	9045	9511	9081	8068
66	8446	8346	9136	8438	7459
60	7710	7500	8660	7690	6875
54	6925	6545	8090	6888	6320
48	6148	5523	7431	6089	5800
42	5433	4478	6691	5351	5321
36	4800	3455	5878	4735	4886
30	4404	2500	5000	4304	4500
24	4240	1654	4067	4112	4164
18	4142	955	3090	4217	3880
12	4063	432	2079	4663	3649
6	3999	109	1045	5492	3647

354. *Coroll. VII.* Scorgesi da questa Tavola, che quando l' angolo d' incidenza ol-

trepassa li 60 gradi, possiamo con sicurezza seguire la legge Neutoniana de' quadrati de' seni, poichè dentro quel limite l'aberrazione è picciolissima, e l'errore spregevole. Ma per le incidenze minori gioverà valerci delle formole di Bossut, o di Romme; massime della prima, la quale torna esattissima a riserva degli angoli d'incidenza minori di 18°. Oltre questo limite aberra essa pure notabilmente.

CAP. VI.

Altri risultati delle medesime sperienze.

355. Le leggi registrate ne' Corollarj precedenti ponno tenersi per indubitate, atteso il gran numero e l'esatta corrispondenza delle prove che le confermano. Oltre queste leggi furon osservate nel corso di quegli esperimenti diverse altre particolarità degnissime d'attenzione esse pure. Noi le raccoglieremo ne' seguenti Corollarj.

356. *Coroll. I.* Non si tralasciò d'osservare come meglio si potè, l'altezza di quel labbro d'acqua che formasi davanti la prora del vascello in corso; e questa si osservò così nel mezzo, ove il labbro è più rilevato, come verso gli orli, ov'è più basso.

L' altezza del colmo, contro l' opinione di Juan (333) appari sempre assai maggiore dell' altezza dovuta alla velocità.

357. *Coroll. II* La lunghezza del battello, dentro certi limiti, influisce notabilmente nel valore assoluto della resistenza, ma in senso opposto alla dottrina di Juan (336). Poichè i corpi più corti soffrono resistenza maggiore. Pensa il Sig. Bossut che nelle velocità mezzane la lunghezza più vantaggiosa ad un solido per provare la minore resistenza sia all' incirca tripla della larghezza. Allungandolo di più, la resistenza tornerebbe a crescere alcun poco, per l' attrito dell' acqua contro i suoi fianchi; ma quest' accrescimento è lentissimo.

358. *Coroll. III.* Si provò a ricoprire la faccia posteriore del battello con una poppa cuneiforme com' era la prora. Per quest' aggiunta la resistenza diminuisce di qualche poco, e tanto più quanto più s' allunga la poppa.

Il Sig. Romme ha cercato di comprendere nella sua formola anche quest' elemento. Quando il battello sia guernito d' una poppa i cui lati facciano colla direzione del corso l' angolo i, egli alla sua formola (352) sostituisce quest' altra

$$10000 : 30 \frac{1 + \sin. k^2 + \sin. i^2}{180° - k}.$$

Ma fattone il confronto colle sperienze citate, apparirà che la diminuzione della resistenza in grazia della poppa non è tanta, quanta da questa formola si conchiuderebbe.

359. *Coroll. IV.* Oltre le prore cuneiformi si cimentaron pur anche alcune prore di base curvilinea. E quì nuovamente comparve quell'effetto già prima avvertito dal Signor Borda; che mentre la resistenza delle prore rettilinee riesce nel fatto maggiore di quel che porterebbe la Teoria Neutoniana, la resistenza delle prore curvilinee riesce per lo contrario minore. Così ritenendo il numero 10000 per esprimere la resistenza della sezione rettangola del battello, quella della prora semicilindrica avrebbe dovuto per la Teoria (320) riuscire 6660; e non riuscì che 5500 all' incirca.

Pensa il Sig. Romme che la resistenza d' una prora curvilinea possa tenersi a un di presso eguale a quella d' una prora rettilinea che abbia per base il poligono formato colle corde degli archi della curva. Così egli ragguaglia la resistenza della prora semicilindrica a quella d' una prora cuneiforme coll' angolo al vertice di 90 gradi. Ed invero colle sperienze di Bossut, e con molte altre prove sperimentali da lui raccolte questa determinazione s' accorda lodevolmente.

360. *Scolio.* Riguardando agli effetti os-

servati ne' tre articoli precedenti, agevolmente ravviseremo il principio comune da cui dipendono. Quanto più facilmente le particelle dell' acqua che si disviano dal solido potranno incamminarsi rasente i suoi fianchi, e quindi avvicinarsi alla sua faccia posteriore, tanto minore deve riuscire la resistenza: perchè maggior sarà la pressione del fluido contro la faccia posteriore, la qual pressione dovendosi (324) detrarre dall' anteriore, va a scemare la resistenza. E pel contrario tutto quel che disvia le particelle da questo movimento, accresce la forza dell' urto, perchè va a diminuire la pression posteriore che le contrasta.

CAP. VII.

Altre sperienze sullo stesso argomento.

361. SPERIENZA I. L'albero verticale *AB* (Fig. 13) mobile su due perni *A*, *B* è collocato nel mezzo d' una corrente. Sporge dal suo fianco per mezzo di due bracciuoli la lastra rettangolare *V* che chiamasi *Ventola*. Mentre l' acqua urtando la ventola tende a far girare l' albero, il peso *T* traendo una funicella avvolta alla ruota orizzontale *O S* tende a volgerlo in contrario.

Si espone la ventola in sito ove la velocità del fiume sia cognita, per esempio poco sotto il filone, la velocità del quale facilmente si rileva con un galleggiante. E si accresce il peso T quanto occorre per tener ferma la ventola contro l'urto, o normalmente, o con qualunque data obbliquità.

Ottenuto l'equilibrio, il momento della resistenza $R . KV$ dovrà eguagliare il momento del peso $T . CO$. E quindi dal peso T agevolmente si rileverà il valore della resistenza R.

Moltissime sperienze ha fatte con questo suo strumento l'Ab. Ximenes (*a*) parte nel Canale del Lago di Castiglione, parte in diverse sezioni del fiume Arno.

362. *Coroll. I.* Confermarono queste sperienze che l'urto diretto contro la ventola vale il peso d'un prisma d'acqua di base a lei uguale, e dell'altezza dovuta alla velocità. Il che eziandio ne assicura (319) essere la misura dell'urto la stessa o si muova il solido contro il fluido, o viceversa.

363. *Coroll. II.* Confermarono pure che nè la ragion duplicata de' seni d'incidenza, nè la ragion semplice non rappresentano la vera legge degli urti obbliqui. Per altro questa legge non potrebbe sicuramente fissarsi cogli

(*a*) *Nuove sperienze idrauliche*. *Siena*. 1780.

sperimenti di Ximenes, prima per l'incertezza che rimane sulla situazione del centro di resistenza negli urti obbliqui, poi pel continuo oscillar della ventola, anche nelle più regolate correnti, che rende molto incerta la stima degli angoli d'incidenza.

364. *Sperienza II.* Calasi nel fiume una cassetta di latta (fig. 14) opponendo alla corrente la faccia *M N* traforata da molti piccoli buchi. Dall' opposta faccia esce un sifone il quale poi si ripiega verticalmente all'insù, e si vede sporgere in *A B*. Se la cassetta si tuffasse nell' acqua stagnante, è certo che nel sifone l'acqua monterebbe sino in *K* al livello dell' acqua esterna. Ma opponendosi la cassetta alla corrente, l'acqua del sifone salirà a maggiore altezza come in *Q*, e l'altezza della colonna *K Q* misurerà l'eccesso della pressione della corrente contro la faccia anteriore *M N* sopra la pressione che vi farebbe l'acqua stagnante.

Che se la cassetta si giri, volgendo la faccia traforata alla parte opposta, si vedrà l'acqua del sifone tenersi più bassa del pelo della corrente, come in *q*, e la colonna *K q* misurerà similmente il difetto della pressione della corrente contro la faccia posteriore dalla pressione che vi farebbe l'acqua stagnante.

Il vantaggio di questa macchinetta adoperata a molte prove dal Sig. du Buat (a) consiste non solo nel poter misurare separatamente le due pressioni opposte, anteriore e posteriore, ma ancora nel poter conoscere la pressione sopra qualsivoglia determinato punto della superficie. Poichè può tenersi aperto un pertugio solo, come *m*, ed allora si viene a conoscere la pressione contro il punto *m*. E così può vedersi se varj e come varj la pressione ne' diversi punti delle due facce.

Può anche adattarsi la cassetta alla prora, o alla poppa d'un battello, onde ravvisare lo stato delle pressioni contro un solido di qualunque lunghezza. Ed invece di tenerla ferma contro la corrente, si può tirarla con moto equabile per l'acqua stagnante, e così riconoscere se le pressioni siano in ambi i casi le stesse.

365. *Coroll. I.* Sulla faccia anteriore del solido la pressione non è la stessa per tutti i punti, ma maggiore nei punti situati verso il mezzo, minore presso gli orli, con degradazione sensibilissima. Lo stesso osservasi nella faccia posteriore, ma con differenze meno considerabili.

366. *Coroll. II.* La pressione anteriore è

(a) *Princ. d' hydraulique* §. 440. *etc.*

sempre più grande di quella che farebbe l' acqua stagnante; la posteriore per lo contrario è più piccola.

367. *Coroll. III.* Col variarsi la lunghezza del solido la pressione anteriore non cangia punto; ben cangia la pression posteriore, la qual va crescendo a misura che il solido s' allunga, entro però certi limiti. E di qui avviene (357) che coll' allungarsi del corpo la resistenza si va scemando.

368. *Coroll. IV.* La misura assoluta della resistenza, la quale risulta dall' eccesso della pression media anteriore sopra la posteriore, si trovò all' incirca corrispondere all' altezza dovuta alla velocità, confermandosi così il risultato delle precedenti sperienze (350, 362). Nè apparve notabil divario, o si movesse la cassetta nell' acqua stagnante, o reggesse immobile all' urto della corrente.

369. *Scolio*. Tenendo dietro a picciolissime differenze sembrò veramente a du Buat, che la misura dell' urto corrispondesse ad un altezza un po' maggiore della dovuta alla velocità. E parvegli ancora che maggior fosse l' urto della corrente contro il solido fermo, che non è la resistenza del solido mosso nell' acqua stagnante. Ma conviene avvertire 1.° che assai poche ed irregolari furono le sperienze fatte col solido fermo esposto alla corrente. 2.° che nelle altre l'u-

niformità del moto non era troppo bene assicurata. 3.° che le oscillazioni del fluido nel sifone rendono molto incerta la misura d'una piccola colonna, come KQ. 4.° che per quanto numerosi siano i trafori del piano MN, la somma delle pressioni esercitate contro i medesimi non può mai prendersi per la pression totale del piano, onde questa pression totale dee poi valutarsi con un estimazione che è sempre vaga ed incerta. Dalle quali osservazioni conchiudesi non essere queste sperienze capaci di quella precisione che si vorrebbe per accertare le picciole varietà.

CAP. VIII.

Sperienze sulla resistenza ne' canali angusti.

370. Il terzo caso che nella resistenza de' fluidi vuol essere separatamente esaminato, si è quando l'ostacolo ingombra notabil parte della sezione. Ben si vede che allora più difficoltà dee provare il fluido a scorrere lungo i lati del corpo, ed appoggiarsi alla sua parete posteriore: quindi maggiore intumescenza davanti la prora, e maggior vuoto verso la poppa, e per l'una e l'altra ragione maggiore resistenza. Pur sa-

rà bene che l'esperimento ci renda vieppiù palese la sussistenza e la misura di quest'effetto.

371. *Sperienza*. Le sperienze descritte agli articoli 346. 347 furono dagli stessi Autori rifatte in un lungo canale formato con tavole per entro lo stesso stagno, e più o meno ristretto sia in larghezza, sia in profondità, o in entrambe le dimensioni; notando ad ogni volta la proporzione tra la sezion del canale, e quella del battello. Alle volte il canale era aperto nelle sue estremità, e comunicava coll' acqua del vasto stagno; altre volte era chiuso.

372. *Coroll. I.* Ancor qui le resistenze crebbero come i quadrati delle velocità, poste pari le altre circostanze.

373. *Coroll. II.* Ma furon esse molto maggiori che non erano nel fluido indefinito; e tanto più s'accrescevano, quanto maggiore era la proporzione tra l'ampiezza del battello e quella della sezione. Trovossi anche la resistenza un po' maggiore, quando il canale era chiuso ne' suoi due termini.

374. *Coroll. III.* Il Sig. du Buat (*a*) ha ricavato da queste sperienze la seguente formola. Sia *M* il rapporto tra la sezion naturale del canale, e quella dell' ostacolo,

---

(a) *Princ. d'hydr.* §. 579. 580.

ed esprimasi per 10000 la resistenza nel fluido indefinito. Sarà la resistenza nel canale $= \frac{84600}{M + 2}$. Della qual formola potremo valerci con sicurezza sintanto che M non sarà minore di 1,5 che è il più piccolo suo valore nelle sperienze citate.

E così se l'ostacolo ristringa l'alveo per metà, sarà la resistenza 21150, crescendo più del doppio sopra la resistenza del fluido indefinito.

CAP. IX.

Della Resistenza de' mezzi.

375. Tutte le precedenti Sperienze consentono nel mostrare la resistenza proporzionale al quadrato della velocità; e questa legge comunemente ammessa dai Meccanici (I. 204) nel calcolare i movimenti de' corpi nei mezzi resistenti, non avrebbe uopo d'ulteriore conferma. Con tutto ciò il ragguaglio delle sperienze direttamente istituite sulla resistenza de' mezzi potrà servire ad assicurarci 1.° se questa legge così abbia luogo nella resistenza dell'aria, come in quella dell'acqua. 2.° se come vale nelle mediocri velocità, così vaglia ancora nelle

picciolissime e nelle grandissime. S' se la resistenza d' una sfera sia veramente la metà di quella che proverebbe il suo cerchio massimo, come dalla Teoria Neutoniana (323) si dedurrebbe.

376. *Sperienza I.* Neuton e Desaguliers (*a*) da grandi altezze lasciarono cader per l'aria or delle palle cave di vetro, or delle vesciche ben gonfie e rotonde, ed osservarono con diligenza i tempi delle cadute. Simili prove fece Neuton nell' acqua, in minori altezze, con delle palle di cera impiombate.

377. *Coroll. I.* Si calcoli il tempo della caduta per le formole del moto accelerato (I. 205) assumendo la resistenza proporzionale al quadrato della velocità, ed uguale alla metà di quella che competerebbe al cerchio massimo della palla. I tempi calcolati si troveranno corrisponder benissimo ai tempi osservati. O se viceversa dato il tempo si calcoli lo spazio della discesa, le discese calcolate concorderanno colle osservate.

378. *Coroll. II.* Adunque così nell' aria come nell' acqua, la resistenza è proporzionale al quadrato della velocità: e la resistenza del globo è veramente la metà di quella del suo cerchio massimo.

(*a*) *Neuton Princip. Lib. II. Prop.* 40. *Schol.*

379. *Scolio*. A guida di chi volesse rifare gl' indicati calcoli ne additeremo la traccia nel seguente esempio. Una vesoica del peso di grani 128 e del diametro di poll. 5,28 cadde in 19″ dall' altezza di poll. 3254.

Queste misure sono inglesi. Convien sapere che prendendo per unità il pollice inglese, è la gravità $g = 385,8$; e che un pollice cubo d' acqua pesa gr. 253,33; onde siccome nelle medie temperature l' aria si reputa 850 volte più rada dell' acqua, un pollice cubo d' aria peserà gr. 0,298.

Or prima di tutto convien trovare il peso della vescica nel vuoto. Il suo volume è poll. cub. 77,073. Un eguál volume d' aria peserà dunque grani 0,298 . 77,073 o sia gr. 22,97; onde (54) il peso della vescica nel vuoto sarà gr. 128 + 22,97 o sia gr. 150,97. Adunque l' aria scema il peso della vescica da gr. 150,97 a gr. 128.

Passiamo ora a trovare il valore della forza ritardatrice. Per le nostre ipotesi la resistenza vale la metà del peso d' un prisma d' aria avente per base il cerchio massimo della palla, che è poll. qu. 21,895, e per altezza $\frac{u^2}{2g}$. Valerà dunque

$$\frac{0,298 . 21,895\, u^2}{2 . 2g} \text{ o sia } \frac{1,131177 . u^2}{g}$$

Quest'è la resistenza che soffre l' intera massa della palla. Or per avere la forza ritardatrice, o sia la resistenza che soffre ciascuna particella elementare, convien dividere la resistenza trovata per la massa della palla, o sia per $\frac{150,97}{g}$. Sarà dunque la forza ritardatrice $\frac{1,131177u^2}{150,97}$ o sia $0,010806u^2$. Noi nella Meccanica (I. 204) esprimemmo la forza ritardatrice per gk^2u^2. Sarà dunque per questa sperienza $gk^2 = 0,010806$.

Per passar quindi a trovare il valore del coefficiente k conviene avvertire che scemandosi il peso della vescica nell' aria da 150,97 a 128, andrà scemato nella stessa ragione il valore della gravità acceleratrice g; il quale perciò si ridurrà a $g = 327,1$. Quindi $k = 0,0057477$; e $gk = 1,88$.

Poste queste cose, consultiam quella formola che (I. 205) esprime lo spazio pel tempo della caduta. Quivi si vede subito che il termine e^{-gkt} diventa una frazion picciolissima, trascurando la quale, resta

$$s = \frac{1}{gk^2} \cdot \log. \frac{1}{2} e^{gkt} = \frac{1}{gk^2} (gkt - \log. 2)$$

Il logaritmo iperbolico del 2 è 0,693. E quindi fatto $t = 19''$ viene $s =$ poll. 3242; con tenue divario dal valor vero.

380. *Sperienza II.* Lo stesso Sig. Neuton (*a*) fece oscillare de' corpi sferici nell'aria, nell'acqua, nel mercurio. In ciascuna sperienza lasciò oscillare il pendolo sintantochè l'arco della salita si riducesse a una determinata parte dell'arco della prima discesa; per esempio ai sette ottavi di quell'arco. E contò quante oscillazioni ci voleano prima d'ottenere un tal decremento.

Con una serie di siffatte sperienze, nelle quali vadasi variando l'arco della prima discesa, si può riscontrare se la resistenza segua la proporzione de' quadrati delle velocità. Il che si fa a questo modo.

381. *Coroll. I.* Posta la resistenza come il quadrato della velocità, ed espressa per $\frac{1}{2} h u^2$, dimostrasi nella Meccanica (I. 253) che se dicasi E l'arco della prima discesa, ed L l'arco dell'ultima salita dopo n vibrazioni, sarà

$$L = E - \frac{2}{3} n h E^2 + \frac{4}{9} n^2 h^2 E^3$$

lo stesso che

$$L = \frac{E}{1 + \frac{2}{3} n h E}$$

(a) *Princip. Lib. II. Prop.* 31. *Schol.*

posto che si trascurano le potenze di h superiori al quadrato. Se dunque sia L una determinata parte dell'arco E, fatto $L=mE$, avremo

$$nE=\frac{3-3m}{2mh}.$$

Dovrà dunque il prodotto nE esser costante; o sia il numero delle oscillazioni dovrà trovarsi reciprocamente proporzionale all'arco della prima discesa.

382. *Coroll. II.* Ora in ciascuna serie delle sperienze Neutoniane scorgesi il numero n seguire appunto la ragione inversa dell'E; salvo che quando l'E è molto picciolo; che allora il numero n riesce minore che quella ragione non porterebbe.

383. *Coroll. III.* Adunque nelle piccolissime velocità la resistenza trovasi proporzionatamente più grande: e però passando dalle piccole velocità alle mediocri, la resistenza cresce meno di quel che faccia il quadrato della velocità.

384. *Scolio*. Veggiamolo per modo d'esempio nella prima serie delle sperienze di Neuton. Era la lunghezza del pendolo pollici inglesi 126. Si contavano le vibrazioni sintantochè l'arco L si riducesse ai sette ottavi di E. Fatti gli archi E successivamente di pollici

2; 4; 8; 16; 32; 64

furono i corrispondenti numeri n

164 ; 121 ; 69 ; 35,5 ; 18,5 ; 9,66

Ciascuno degli archi E è doppio del precedente; dovrebbe adunque ciascuno de' numeri n esser la metà del precedente. Negli archi maggiori non v'è gran divario; ma nella seconda sperienza ove la velocità della palla non oltrepassò piedi 0,82, e molto più nella prima ove non oltrepassò piedi 0,41 l'aberrazione è manifesta.

385. *Sperienza III.* Aveva il Sig. Robins (*a*) inventato uno strumento per misurare la velocità d'una palla cacciata da un arma da fuoco, a qualunque distanza dalla bocca del pezzo. Con tale strumento potè assicurarsi della velocità iniziale d'una palla di piombo del diametro di tre quarti del pollice inglese, e del peso di gr. 600, quando fosse sparata da un dato pezzo con una data carica. Fece poi con essa palla (*b*) più tiri orizzontali, e collo stesso strumento misurò la velocità della palla ora ad una ora ad un altra distanza dalla bocca del pezzo. Per questi intervalli la trajettoria non deviava sensibilmente da una retta orizzontale.

(a) *Nouv. Principes d' Artillerie. Chap. I. Prop.* 8.

(b) *Chap. II. Prop.* 2.

Altre volte diretto il tiro orizzontalmente quasi a livello d'uno stagno, notò la distanza alla quale la palla dava sull'acqua, e il tempo che metteva a percorrerla.

386. *Coroll. I.* Anche queste sperienze servono a verificare la legge della resistenza. Poichè colle note formole Meccaniche può calcolarsi facilmente il moto orizzontale della palla per un mezzo resistente con forza $g k^2 u^2$. Le equazioni (I. 187)

$$d s = \frac{-u d u}{g k^2 u^2} ; \; d t = \frac{-d u}{g k^2 u^2}$$

integrate in guisa che quando $t = 0$ sia $s = 0$, ed' $u =$ alla velocità iniziale c, daranno

$$u = c \,.\, e^{-g k^2 s} ; \; t = \frac{1}{g k^2 c} (e^{g k^2 s} - 1)$$

Si calcolino adunque per queste formole le velocità e i tempi coi dati delle sperienze di Robins, e si confrontino colle velocità e coi tempi osservati.

387. *Coroll. II.* Ora le velocità osservate riuscirono notabilmente minori delle calcolate, e i tempi per lo contrario maggiori. Colla velocità iniziale di piedi 1670 gli spazj di 50 e di 100 piedi ridussero la velocità a 1550, e 1425; laddove pel calcolo dovea rimanere 1617, e 1566.

E colla velocità iniziale di piedi 400, preso un medio fra tre sperienze, lo spazio

di 1000 piedi fu percorso in quattro secondi e mezzo; laddove per la teoria dovea spedirsi in tre secondi e mezzo.

388. *Coroll. III.* Adunque nelle grandissime velocità la resistenza trovasi proporzionatamente maggiore: e però passando dalle mediocri velocità alle grandissime, la resistenza cresce più che non fa il quadrato della velocità.

389. *Scolio I.* Rimarrebbe ora a sapersi da qual cagione derivi e con qual legge proceda questo fenomeno, che nei moti assai lenti la resistenza cresca meno del quadrato della velocità, ed il contrario segua ne' moti rapidissimi. Ma le ricerche de' più sagaci indagatori di queste materie non hanno ancora potuto procurarci nozioni abbastanza certe e precise. Ben si presume che ne' moti lentissimi alla resistenza che proviene dalle pressioni della massa fluida s' aggiunga quella della tenacità del fluido stesso, la quale essendo secondo alcuni costante, secondo altri proporzionale alla semplice velocità, farà sì che la resistenza totale cresca meno che non fa il quadrato della velocità. Nelle velocità mezzane, il termine che esprime la tenacità rimane picciolissimo in confronto dell' altro, e il divario non è più sensibile.

L' aumento poi della resistenza ne' moti

velocissimi si vuol ripetere da ciò che il fluido non ha tempo d'accorrere alla parte posteriore del corpo, e sostenerla con tutta la sua pressione.

391. *Scolio II.* Ma nelle mediocri velocità la resistenza non si diparte dalla ragion duplicata delle velocità stesse. Se dopo tante e sì varie prove fosse d'uopo di nuovi riscontri a conferma di questa verità, un altro potremmo trarne dall'osservazione fatta da Mariotte (*a*) che lo smanco de' getti quasi verticali dall'arrivare alla precisa altezza del livello del recipiente si trova sempre proporzionale al quadrato dell'altezza medesima.

Poichè così appunto dev'essere posto che la resistenza dell'aria alla vena zampillante sia proporzionale al quadrato della velocità. Infatti sia la velocità iniziale della gocciola che sgorga dal lume $= c$, e sia la resistenza $= g k^2 u^2$. L'altezza a cui monterebbe la gocciola senza la resistenza sarebbe (I. 195) $\frac{c^2}{2g}$, e posta la resistenza sarà (I. 208) $\frac{1}{2gk^2}\log.(1+k^2c^2)$. Sarà dunque lo smanco

$$\frac{c^2}{2g} - \frac{1}{2gk^2}.\log.(1+k^2c^2)$$

(a) *Mouv. des eaux. Part. IV. Disc. I.*

che svolto in serie il logaritmo, e negletto k^4 e le superiori potenze, rimane $\frac{k^4 c^4}{4g}$. È dunque il suddetto smanco proporzionale al biquadrato della velocità c, o sia al quadrato dell'altezza del recipiente.

CAP. X.

Del Centro di resistenza.

391. SPERIENZA. AB (Fig. 15) è il profilo d'una lastra rettangolare tutta sommersa nell'acqua stagnante. P è il centro di gravità della lastra; O il suo centro di grandezza; o sia il centro di gravità del suo piano; G il centro comune del peso della lastra che tira verticalmente all'ingiù nel punto P, e della spinta dell'acqua che spinge verticalmente all'insù nel punto O. La lastra è mobile attorno un asse orizzontale che la traversa per tutta la sua larghezza, e passa pel punto G; ond'è palese che sin tanto che la lastra è ferma sott'acqua, starà in equilibrio in qualunque positura si collochi. Ora quest'asse, e con esso la lastra tirasi orizzontalmente per la direzione GX, e si misura la sua velocità nel modo stesso praticato nelle precedenti spe-

rienze (346). Dopo breve spazio essa cammina equabilmente e mantiene inclinazion costante AGX. Piantasi uno stilo di ferro orizzontalmente in tal sito che ferisca la lastra nel termine della sua corsa, e dall' osservare su qual punto vi faccia impressione, si viene a conoscere in ciascuna sperienza l' inclinazione AGX.

Per una lunga serie di tali sperienze il Sig. Prof. Avanzini (a) ha ricercata la posizione del centro di resistenza della lastra, e gli elementi che concorrono a determinarla. Per il che egli avverte che in ciascuna sperienza dopo che l' angolo AGX si è renduto costante, il centro di resistenza dee cadere sull' asse medesimo, che passa per G: poichè siccome tutte le altre forze agiscono nel punto G, se l' azione della resistenza cadesse fuori di G, essa farebbe girar tuttavia la lastra, il che è contro il fatto. Posto questo principio, passeremo a notare i fenomeni osservati, e le conseguenze che se ne traggono.

392. *Coroll. I.* Cadendo il punto G nel punto O, l' angolo AGX fu sempre retto. Quindi nell' urto diretto il centro di resistenza coincide col centro di grandezza.

(a) *Nuove ricerche sulla resistenza de' fluidi. Istituto Nazionale Italiano Tom. I. Part. I.*

393. *Coroll. II.* Cadendo il punto *G* al di sopra del punto *O*, l'angolo *AGX* fu sempre acuto; e tanto più acuto quanto era maggiore l'intervallo *GO*.

Quindi nell' urto obbliquo il centro di resistenza cade al di sopra del centro di grandezza; vale a dire si trasporta verso quel lato della lastra che maggiormente s' innoltra nel fluido; e tanto più quanto è più acuto l' angolo d' incidenza.

394. *Coroll. III.* Essendo *GO* costante, quanto era maggiore la velocità tanto più l'angolo *AGX* riuscì acuto.

Quindi conchiudesi che in pari obbliquità dell' urto, quanto la velocità è maggiore tanto più il centro di resistenza s' avvicina al centro di grandezza. Poichè se coll' accrescere la velocità, l'angolo *AGX* s' impiccolisce, e la lastra piega in avanti, è forza il dire che il centro di resistenza si parta da *G*, e si ritiri verso il punto *O*.

In questo girare della lastra per lo stesso diminuirsi dell' angolo *AGX* il centro di resistenza torna poi a scostarsi da *O* (393) sino a rimettersi in *G*, ed allora si ricompone l'equilibrio.

395. *Coroll. IV.* Variando le dimensioni della lastra senza cangiare nè la velocità, nè l' intervallo *GO*, si osservò che col crescere la lunghezza *AB* l'angolo *AGX* si fa

più acuto, e col crescere la larghezza succede il contrario.

Quindi nello stesso modo (394) si conchiuderà che il centro di resistenza tanto più s' avvicina al centro di grandezza, quanto la lastra è più lunga e più stretta.

396. *Coroll. V.* Replicate le stesse sperienze col far mover la lastra per l' aria quieta, l'angolo AGX in eguali circostanze riuscì assai meno acuto.

Quindi per lo stesso discorso (394) l' intervallo tra il centro di resistenza e quello di grandezza è molto maggiore nell' aria che non è nell' acqua.

397. *Coroll. VI.* Nell' acqua lo scostamento del centro di resistenza dal centro di grandezza è ordinariamente assai piccolo. Per una lastra lunga 9 pollici, larga 6, percossa obbliquamente con velocità di 20 pollici, e con angolo d' incidenza di 21° 30' esso non oltrepassò un sesto della lunghezza, vale a dire un pollice e mezzo. Ne' moti più celeri e nelle inclinazioni minori sarebbe assai più piccolo.

398. *Scolio I* Le stesse sperienze ripetute con lastre sporgenti in parte fuori dell' acqua manifestarono effetti analoghi. Se non che in questo caso anche nell' urto diretto il centro di resistenza si trovò cadere un poco al di sopra del centro di

grandezza della parte sommersa. Il che si vuol attribuire senza dubbio all' intumescenza del fluido davanti, ed alla sua depressione dietro la lastra; per cui crescendo la resistenza verso l' orlo superiore, non è maraviglia se il centro di resistenza declina verso quella parte.

Ed infatti tanto maggiore appari la declinazione, quanto più rilevato era il labbro fluido; o sia quanto più larga era la lastra, e più veloce il corso.

399. *Scolio II.* Alcune osservazioni del Sig. Avanzini sul movimento di sottili piani cadenti per l' aria confermano a maraviglia la sua dottrina. Figuriamoci che *A B* rappresenti il profilo di uno di questi piani; e ponghiamo che così inclinato com' è all' orizzonte coll' angolo *A G X* si abbandoni a se stesso, ed incominci a discendere. Cada il suo centro di gravità nel centro di grandezza *O*. Se anche il centro di resistenza cadesse in *O* come prima credevasi, il piano dovrebbe discendere sempre parallelo a se stesso. Ma siccome questo centro s'avanza (393) verso la parte che prima riceve l' urto del fluido, vale a dire verso il lato *B*, è manifesto che il piano dovrà da principio girare abbassandosi il termine superiore *A*, e salendo il termine *B*. E così infatti osserviamo accadere. Veggasi nell' Autore

stesso una più sottile disamina di questi movimenti.

400. *Scolio III.* Volle ancora il Sig. Avanzini osservare il modo col quale le linee d'acqua si sviano dall'incontro della lastra, e la via che tengono nel portarsi dalla parte anteriore alla posteriore. Il che ottenne col tirar molto adagio la lastra fermata ora in positura normale ora obbliqua al proprio movimento, ed osservare frattanto il corso di minutissimi corpi poco più pesanti dell' acqua, i quali rimanendovi per qualche tempo sospesi ubbidivano assai prontamente ai moti del fluido. Questi moti per non andar troppo in parole metteremo sotto gli occhi nella fig. 16.

Quando la lastra emerge dall'acqua, le curve superiori rimangono intercettate dallo scontro della lastra prominente; mentre le inferiori abbracciando con più largo giro la parte posteriore della lastra, lasciano dietro lei una cavità più o meno sensibile.

Facilmente si comprende che nei tratti ab, $a'b'$, cd pei quali le particelle fluide scorrono rasente la lastra, la pression loro contro la lastra dev' essere minore, perchè non è accresciuta dalla forza centrifuga. Posta quest' avvertenza, basterà l' ispezione della figura per farci tosto comprendere 1.° perchè nell' urto diretto la pressione sia mag-

gіore verso il centro (365) minore verso gli orli. 2.° perchè nell' urto obbliquo la pressione sia maggiore verso la parte che più s'innoltra nel fluido, e però (393) il centro di resistenza a questa parte s'accosti.

CAP. XI.

Degli Strumenti idrometrici, e primieramente de' galleggianti.

401. Dalla dottrina della resistenza de' fluidi dipende la ragione e l' uso degli strumenti che servono a misurare la velocità delle acque correnti, e che perciò idrometrici si chiamano. Noi spiegheremo in breve i principali artificj a tal uopo adoprati, incominciando dai semplici galleggianti.

402. *Proposizione*. Spiegare l' uso del galleggiante semplice.

Gettandosi in una corrente equabile e pressochè orizzontale un picciol corpo che vi galleggi, rimanendo però quasi tutto sott' acqua, questo corpo in breve verrà a moversi con velocità costante, ed eguale a quella della corrente. Poichè mentre ha velocità minore, sarà accelerato dall' urto del fluido susseguente, e se concepisse velocità maggiore, sarebbe ritardato dalla resistenza

del fluido antecedente. Osservata dunque la velocità del galleggiante, verremo a conoscere la velocità superficiale del fiume nel filone.

403. *Scolio I.* Abbiam detto che il galleggiante dee seppellirsi quasi tutto nell'acqua. Se ne sporgesse notabilmente, non potrebbe acquistare tutta la velocità del fiume. Poichè se pongasi che l'abbia tutta acquistata, cosicchè la parte immersa non soffra più azione alcuna dall'acqua circostante, si vede che la parte eminente sarebbe tuttavia ritardata dalla resistenza dell'aria. Ben è vero che quest'effetto nell'aria tranquilla sarà ordinariamente insensibile, ma potrebbe essere a molti doppj accresciuto dal vento.

404. *Scolio II.* Abbiam richiesto di più che il fiume sia d'insensibil pendenza. Se nò, il galleggiante concepirà velocità maggiore di quella del fiume. Poichè decomponendo il suo peso in due forze l'una perpendicolare, l'altra parallela alla corrente, la prima è sostenuta dalla spinta dell'acqua, ma la seconda rimane, ed accelera il moto del galleggiante. Pongasi dunque che questo abbia già presa tutta la velocità del fiume, cosicchè non soffra più azione dalla corrente; il suo moto sarà tuttavia accelerato dalla gravità relativa. Per altro nelle

pendenze ordinarie delle correnti uniformi, l' eccesso della velocità del galleggiante sopra quella del fiume monta a pochissimo; e altronde può facilmente ridursi a calcolo.

405. *Scolio III.* Abbiam detto finalmente che il galleggiante mostrerà la velocità del filone. Per il che è da sapere che i galleggianti dopo breve corso si riducono sul filone del fiume, e che ivi solo concepiscono l' intera velocità della corrente. Per intenderne la ragione immaginiamo un galleggiante posto fuori del filone. Le particelle d' acqua che l' investono non hanno tutte la stessa velocità, ma le più vicine al filone corrono più veloci delle altre. Quindi la spinta sarà eccentrica, e il galleggiante ne concepirà due moti (I. 278) l' uno progressivo, e l' altro rotatorio attorno il suo centro di gravità, avanzandosi nel fluido il termine più vicino al filone, e ritraendosi indietro il termine opposto. Ma nel voltarsi così, è facile il vedere che esso urterà obbliquamente il fluido anteriore, la di cui resistenza dovrà perciò rispingerlo continuamente verso il filone, nè cesserà finchè non ve l' abbia condotto interamente.

CAP. XII.

Del Galleggiante composto.

406. Formasi questo galleggiante con due palle A, B (Fig. 17) congiunte mediante un filo; la prima specificamente più leggera dell' acqua, la seconda più pesante; temperandone i pesi così che buttato in acqua lo strumento, la palla di sopra rimanga sepolta quasi a fior d' acqua. Lasciato in balia della corrente, il galleggiante prende ben tosto un moto equabile; si osserva la sua velocità, ed insieme con un galleggiante semplice si esplora la velocità superficiale della corrente. Con questi dati può rilevarsi la velocità dell' acqua nel punto B ove investe la palla inferiore (*a*) siccome fra poco vedremo. E così cangiando la lunghezza del filo esploreremo successivamente le velocità a diverse profondità sotto la superficie.

407. *Proposizione*. Reso equabile il moto del galleggiante composto, determinare la sua velocità c.

(a) *V Brunacci Istituto Naz. Italiano Tom. I. Part. II.*

Esprimano A, B i diametri delle due palle, e siano V, u le velocità dell'acqua in A ed in B. La forza che accelera la palla A essendo proporzionale ad $A^2 (V-c)^2$ può farsi $= m A^2 (V-c)^2$; e similmente la forza che ritarda la palla B sarà $= m B^2 (c-u)^2$. Ora la risultante di queste due forze dev'esser nulla, essendo per ipotesi il moto equabile. Dunque

$$A(V-c) = B(c-u) \quad \text{onde}$$

$$c = \frac{AV + Bu}{A + B}$$

408. *Coroll. I.* Conoscendosi dunque dall'osservazione le due velocità c ed V, potrà facilmente rilevarsi la velocità u.

409. *Coroll. II.* Se le due palle sono eguali, la velocità del galleggiante è media aritmetica fra le velocità dell'acqua in A ed in B.

410. *Scolio I.* Per ottenere che la palla A rimanga sepolta quasi a fior d'acqua, convien far sì che il peso specifico del galleggiante riesca a un dipresso eguale a quello dell'acqua. Sia p il peso specifico della palla A, q quello della palla B, sarà il peso specifico del galleggiante (63) $\frac{pA^3 + qB^3}{A^3 + B^3}$. Dovrà dunque questo valore essere $= 1$; o sia p e q dovranno prendersi in modo onde sia

$$p A^3 + q B^3 = A^3 + B^3 .$$

E se le due palle saranno eguali di mole, dovrà la gravità specifica dell'acqua essere media aritmetica fra le loro gravità specifiche.

411. *Scolio II.* Poco rimarrebbe a desiderare nell'uso di questo strumento, se vi fosse modo di conoscere con tutta precisione a qual profondità sotto il pelo della corrente cammini la palla B, e perciò a quel punto competa la velocità u. Se il filo potesse riguardarsi come inflessibile, per trovar questa profondità converrebbe moltiplicare la lunghezza del filo pel coseno della sua declinazione dalla verticale, la qual declinazione potrebbe agevolmente calcolarsi, conosciuta che fosse la velocità u, ovvero anche potrebbe osservarsi immediatamente con qualche artificio. Ma la curvatura del filo sott'acqua, per picciola ch'ella sia, può produrre uno svario troppo grande.

Che se invece del filo si unissero le palle con una verga rigida, questa non potrebbe farsi così sottile da trascurare l'azione dell'acqua contro della medesima. Nè vi è modo di porre a calcolo quest'azione; poichè essa dipende dalla scala della velocità fra i punti A e B, che è appunto quella che si cerca.

Ad ogni modo quando s'abbia cura di

mettere la maggior differenza possibile tra le gravità specifiche delle due palle, onde il filo sia teso con molta forza, e di più le tre velocità V, c, u non differiscan molto fra loro, non si potrà sbagliare gran fatto prendendo la lunghezza stessa del filo per la profondità d' immersione della palla B.

CAP. XIII.

Dell' Asta ritrometrica.

412. Si abbandoni alla corrente l' asta cilindrica HS (Fig. 18) di tal peso specifico che sporga fuori dell' acqua per una picciola parte di sua lunghezza. Tengasi dietro a quest' asta per un tratto de' più regolari del fiume, e s' osservi la velocità del suo cammino, e l' angolo SHK di sua declinazione dalla verticale. Con questi dati potremo conoscere a un dipresso l' andamento delle velocità nella perpendicolare HK (a) siccome prendiamo a mostrare.

413. *Proposizione*. Reso permanente il moto dell' asta, cercasi la sua velocità c, e l' angolo ϕ della sua declinazione dal perpendicolo.

(a) *Bonati Società Italiana Tom. II.*

Sia G il centro di gravità dell'asta, O il punto di mezzo della parte sommersa HS. Dicasi $HS = 2a$, $HG = b$, $HP = x$, onde

$$HM = \frac{x}{\cos.\phi} \text{ ed } Mm = \frac{dx}{\cos.\phi}.$$

Finalmente si chiami u la velocità dell'acqua in M o sia in P.

Le forze che agiscon sull'asta sono le tre seguenti. 1.° Il suo peso, che io chiamerò P, agisce verticalmente all'ingiù sul punto G. E decomposto in due forze una normale, l'altra parallela all'asta, riesce la prima $= P \sin.\phi$ ed il suo momento per inclinar l'asta attorno al punto $H = Pb \sin.\phi$. 2.° La spinta dell'acqua eguale anch'essa a P, ed applicata verticalmente all'insù (52) al punto O. Il suo sforzo normale all'asta è $= -P \sin.\phi$, ed il momento rispetto del punto $M = -Pa \sin.\phi$. 3.° Sia $x = q$ l'ascissa corrispondente a quel punto della corrente che cammina con velocità c pari a quella dell'asta. Da $x = 0$ sino ad $x = q$ ogni elemento dell'asta come Mm è urtato normalmente dall'acqua con forza proporzionale (317) ad $Mm.(u-c)^2.\cos.\phi^2$, la quale però potrà farsi $= Q(u-c)^2 dx \cos.\phi$, essendo Q un coefficiente costante, che facilmente si determina per la dottrina della resistenza de' fluidi. Ed il momento di que-

sta forza riferito al punto H si avrà moltiplicando essa forza per HM, onde riuscirà $= Q\,(u-c)^2\,x\,dx$. Ma da $x=q$ sino ad $x=HK=2a\cos.\Phi$ ogni elemento dell' asta è urtato in senso contrario con forza $=Q\,(c-u)^2\,dx\cos.\Phi$. Ed il momento di questa forza riferito al punto H sarà $= Q\,(c-u)^2\,x\,dx$.

Ora per esser equabile il moto dell' asta conviene che la somma delle forze che normalmente la spingono sia nulla; e per esser costante la sua inclinazione conviene che la somma de' momenti di esse forze per volgerla attorno al punto H sia parimente nulla. Di qui le due equazioni

$$\int(u-c)^2\,dx=\int(c-u)^2\,dx$$

$$Pb\sin.\Phi+Q\int(u-c)^2dx=Pa\sin.\Phi+Q\int(c-u)^2dx$$

Gl' integrali nel primo membro vanno presi da $x=0$ sino ad $x=q$; e nel secondo da $x=q$ sino ad $x=2a\cos.\Phi$.

Nota pertanto la scala delle velocità, sarà dato il valore di u in x, onde sarà dato anche q che è il valore di x a cui risponde $u=c$. Sostituiti questi valori, e compiute a dovere le integrazioni, le due equazioni precedenti daranno a conoscere le due incognite c e Φ. Il che ec.

414. *Scolio I.* Ora per l' uopo nostro con-

vorrebbe risolvere il problema inverso, cioè dato c e Φ trovare il valore di u in x. Ma questo è problema indeterminato. Per renderlo determinato finge il Sig Bonati che la cercata scala delle velocità sia una curva di genere parabolico espressa v. g. dall' equazione

$$u = V - f x^n$$

essendo V la velocità superficiale. Allora dalle nostre due equazioni può determinarsi la specie della parabola, vale a dire il parametro f, e l' esponente n. E così avrem trovata una curva che soddisfa alle due condizioni del movimento dell' asta manifestateci dall' esperimento. Se questa curva non è la vera scala delle velocità, soggiunge il Sig. Bonati, certo vi si accosterà tanto da poterla prender per tale senza grave errore. E ciò veramente crederei potersi affermare, almeno nel supposto che pel tratto HK le velocità calino o crescano continuamente, onde la loro scala non abbia massime nè minime ordinate.

415. *Scolio II.* Convien procurare che la declinazione Φ non oltrepassi 30°, altrimenti l' asta sarà percossa con incidenza minore di 60°, e l' urto (354) non sarà più proporzionale al quadrato del seno d' incidenza, o sia à cos. Φ^2. Il perchè se l' asta avesse una maggiore inclinazione non occor-

rerà farne il calcolo; ma dovrem pinttosto sostituirvene un altra che abbia il suo centro di gravità G più basso e più lontano da O, la quale per conseguenza camminerà più eretta all' orizzonte.

416. *Scolio III.* Se la resistenza fosse proporzionale alla semplice velocità, avrebbe l'asta ritrometrica un vantaggio grande, e certissimo. La sua velocità sarebbe appunto la velocità media dell' acqua nella perpendicolare HK, onde per aver la portata di quella perpendicolare, basterebbe moltiplicare la velocità dell' asta per HK. Ed infatti la prima equazione dell' equilibrio darebbe allora $\int u\,dx = c \,.\, HK$. Ma il concetto della resistenza proporzionale alla velocità è così lontano dal vero, che nulla giova raccoglierne le conseguenze.

CAP. XIV.

Degli altri Strumenti idrometrici.

417. Gli strumenti sin qui descritti non ponno mostrarci le velocità dell' acqua se non che nel filone, e nella perpendicolare che al filone risponde: poichè galleggiando essi liberamente non ponno a meno (405) di non condursi al filone. Per conoscere lo

stato della velocità nell' intera sezione, e dedurne la sua portata, è forza ricorrere ad altri strumenti, che fissandosi in qualunque punto della corrente indicar ne possano la velocità.

418. *Proposizione I.* Spiegare l' uso del Tubo, o Sifone idrometrico (*a*).

Opposta alla corrente la bocca *E* del tubo (Fig. 19) l' acqua vi sale ad un segno *I* superiore al pelo *L* del fiume. Osservasi l' altezza *L I* della colonna prominente. Quanta si trova essere quest' altezza, altrettanta sarà l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua in *E*.

Poichè è palese che la colonna *L I* misura l' eccesso della pressione dell' acqua corrente contro il picciol piano *E* sopra quella che vi farebbe l' acqua stagnante. Misurerà dunque la colonna *L I* l' urto dell' acqua contro il piano *E*; giacchè quest' urto altro non è (324) che l' eccesso della pressione anteriore sopra la pression posteriore, la qual pression posteriore è appunto eguale a quella che vi farebbe l' acqua stagnante. Ma l' altezza della colonna che misura l' urto è uguale (350) all' altezza dovuta alla velocità. Dunque etc.

(a) *Pitot Mem. de l' Acad. des Sc.* 1732.

419. *Scolio I.* Il tubo vuol essere armato in modo da poterlo fissare a diverse profondità. Per osservar poi comodamente l'alzamento *LI*, torna bene l'introdurvi per di sopra un galleggiante che porti infissa una verga sottile, divisa minutamente in parti eguali, e che sporga ben diritta fuori del tubo. Volgendo prima la bocca *E* a seconda della corrente, e poi rivoltandola, si osserva di quanto da una volta all'altra si sollevi la bacchetta, o sia quante divisioni n' escano fuori del tubo, e di tante sarà l'alzamento *L I*.

420. *Scolio II.* Il tubo di Pitot è forse il migliore degli strumenti sino ad ora proposti, o si riguardi la speditezza dell'uso, o la sicurezza. Se non che ne' grandi fiumi riesce difficile il fissarlo saldamente, massime nelle immersioni profonde. D' altra parte nelle tarde correnti l'altezza della colonna prominente è sì poca, che ogni piccolo errore fa gran divario. Nè può sperarsi molta precisione in questa misura per le continue oscillazioni dell'acqua entro del tubo. Michelotti per quietare le oscillazioni propone di chiuder la bocca *E* con un coperchio, lasciandovi aperto nel mezzo un picciol foro; ma allora (365) l'altezza della colonna prominente par che debba riuscire alquanto più della dovuta alla velocità.

421. *Proposizione II.* Spiegare l'uso della Ventola idrometrica.

Questo è lo stesso strumento già descritto all'art. 361 (Fig. 13). Adattasi all'uso idrometrico col fare in modo che la Ventola possa scorrere su e giù per l'asse, e fermarsi a quella profondità che si vuole. Piantato lo strumento, e fissata la Ventola ove vuol misurarsi la velocità, si va aggravando il peso *T* finchè la Ventola regga normalmente all'urto dell'acqua. Allora dal peso *T* si calcola (361) la forza dell'urto, e riducendo questa forza al peso d'un cilindro d'acqua che abbia per base l'area della Ventola, l'altezza che riuscirà di questo cilindro sarà essa (362) l'altezza dovuta alla velocità.

Sarebbe questo strumento assai commendabile per l'uso pratico, se l'apparato ne fosse più semplice, e meno operoso il maneggio.

422. *Proposizione III.* Spiegare l'uso del Pendolo idrometrico.

La palla *Z* (Fig. 20) sospesa dal punto *X* mediante il filo *XYZ*, dall'urto dell'acqua corrente vien rimossa dal perpendicolo, ed il filo declina dalla verticale con l'angolo *TXY*. Si misura quest'angolo con un quadrante adattato al centro di sospensione *X*. Da questa misura si rileverà la velo-

cità dell' acqua corrente in Z, come segue.

Sia il peso della palla sott'acqua $= P$, la declinazione $TXY = \Phi$; la velocità dell' acqua in $Z = u$; l' urto dell' acqua contro la palla essendo proporzionale ad u^2 facciasi $= Q u^2$.

L' equilibrio della palla richiede che la risultante delle forze che la sollecitano riesca nella direzione del filo. Quindi decomposta ciascuna di queste forze in due, l' una perpendicolare, l' altra parallela al filo, la somma delle prime dovrà esser nulla. Ora dal peso P nasce in direzione perpendicolare al filo una forza $P \sin. \Phi$, e dalla spinta $Q u^2$ una forza $= - Q u^2 \cos. \Phi$. Dovrà dunque essere $P \sin. \Phi - Q u^2 \cos. \Phi = 0$; onde $u = \sqrt{\frac{P . \text{tang.} \Phi}{Q}}$.

423. *Scolio*. Ma tutto questo discorso suppone che il filo XYZ stendasi in linea retta. Ora il fatto è che la parte YZ che giace sott'acqua piegasi in una curva Yz; ed allora nel calcolo precedente l' angolo Φ denota la declinazione dell' ultimo latercolo di essa curva, o sia della tangente zx. Quest'angolo può riuscire assai diverso dall' angolo TXY per picciola che sia la curvatura del filo. Nè l' osservazione potrebbe darlo a conoscere. Per iscoprirlo converreb-

be rintracciare la natura della curva Yz. Ma come conoscerla senza sapere la scala delle velocità dell' acqua, che è appunto quel che si cerca?

Che se invece del filo volesse adoperarsi una verga rigida, ritorna in campo la difficoltà di porre a calcolo l' azione dell' acqua contro la verga, giacchè questa non può farsi di tal sottigliezza da trascurare codesta azione, massime nelle immersioni profonde.

Ad ogni modo il miglior mezzo di valersi del pendolo per l' uso idrometrico parmi appunto quello di sostituire al pendolo semplice sin qui usato un pendolo composto, consistente in una semplice asta cilindrica. Il che può farsi agevolmente e con frutto, come nel Capo seguente procurerò di mostrare.

CAP. XV.

Nuovo uso del Pendolo idrometrico.

424. Sia l' asta cilindrica RCD (Fig. 21) sospesa dal punto R ed immersa nella corrente pel tratto CD, il qual s' intenda diviso ne' piccioli ed eguali intervalli Cp, pq, qr etc. Dicasi r il raggio della sezion trasversale dell' asta; q la di lei gravità.

specifica, essendo quella dell' acqua $= 1$; la distanza RQ del suo centro di gravità dal punto $R = b$; la lunghezza $RD = a$; la lunghezza della parte sporgente $RC = m$; la lunghezza di ciascuno degl' intervalli Cp, pq etc. $= 2n$. L' angolo R della declinazione dell' asta dal perpendicolo pongasi $= \Phi$. Per ultimo le velocità degli strati sempre più profondi che investono i tratti Cp, pq, qr etc. siano rispettivamente dovute alle altezze s, s', s'' etc.

425. *Proposizione I.* Resa permanente la declinazione dell' asta dalla verticale, si cerca l' equazione dell' equilibrio.

Tre sono le forze che sollecitano l' asta tendendo a volgerla attorno ad R. La prima è il suo peso $= \pi q r^2 . a$. Decomposta questa forza in due l' una normale, l' altra parallela all' asta, sarà la prima $= \pi q r^2 . a \sin. \Phi$ ed il suo momento rispetto al punto R sarà $= \pi q r^2 . a b \sin. \Phi$.

La seconda è la spinta verticale dell' acqua contro la porzion sommersa CD. Questa spinta è $= \pi r^2 (a - m)$ ed esercita normalmente all' asta una forza $= \pi r^2 (a - m) \sin. \Phi$. E questa agisce sul punto di mezzo della CD distante da R per l' intervallo $\frac{1}{2}(a + m)$, onde il suo momento $= \frac{1}{2} \pi r^2 (a^2 - m^2) \sin. \Phi$.

In terzo luogo va considerato l' urto della corrente che normalmente percuote i singoli tratti Cp, pq, qr etc. Assumeremo (359) per la resistenza del cilindro gli undici ventesimi di quella della sua sezione longitudinale; il che posto, quegli urti saranno per ordine

$2{,}2\,nrs\cos.\phi^2$; $2{,}2\,nrs'\cos.\phi^2$; $2{,}2\,nrs''\cos.\phi^2$

Le distanze de' loro punti d' applicazione da R sono rispettivamente

$m+n$; $m+3n$; $m+5n$; etc.

Quindi la somma de' loro momenti rispetto al punto R sarà

$$2{,}2nr\cos.\phi^2\left\{(m+n)s+(m+3n)s'+(m+5n)s''\ldots\right\}$$

Di queste forze la prima tende a ricondur l' asta al perpendicolo, le altre due ad allontanarnela. Eguagliato adunque il momento della prima a quelli delle altre due, si avrà l' equazion dell' equilibrio

$$(E)\quad (m+n)s+(m+3n)s'+(m+5n)s''\ldots = \frac{\pi r(2abq-a^2+m^2)}{4{,}4n}\cdot\frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^2}.$$

426. *Proposizione II.* Trovare per mezzo dell' asta le velocità nella perpendicolare Nn.

Collocato il centro di sospensione R sulla proposta perpendicolare, vadasi esso di mano in mano abbassando, in guisa che da

prima si tuffi sott'acqua l'ultima divisione Dh, indi la seguente hk, poi la terza ki, e così successivamente ad ogni immersione un nuovo intervallo si nasconda sotto il pelo della corrente. Si noti ad ogni volta il corrispondente angolo ϕ. Dalla serie di questi angoli conosceremo il progresso delle velocità.

Poichè formando l'equazione (E) per la prima immersione, essa non conterrà che la sola incognita s, la quale per conseguenza potrà quindi determinarsi. Si formerà un equazione analoga per la seconda immersione, e postovi in luogo di s il valor già trovato, ne trarremo la determinazione della s'. Similmente dalla terza immersione per via delle già determinate s ed s' determineremo s''; e così in seguito.

427. *Scolio I.* L'avvertenza più essenziale si è che l'angolo ϕ non oltrepassi mai 30 gradi. Quando divenga maggiore, converrà accrescere la gravità specifica dell'asta, o allontanare il suo centro di gravità dal punto di sospensione. Un asta vuota al di dentro, il cui peso possa accrescersi a piacere, gettando per entro il cavo della pallina di piombo, può servir benissimo a tutti i casi.

428. *Scolio II.* Potrebbe temersi che quest' avvertenza non bastasse a render sicuro l'

uso dello strumento. Poichè veramente gli urti dell' acqua sono un po' maggiori presso la superficie che non sono verso il fondo, avendo noi veduto (393) che il centro di resistenza s' accosta più a quella parte che più s' avanza nel fluido urtante. Ma da quel che ivi si è detto (395. 397) può conchiudersi ancora, che attese le dimensioni dell' asta, e attesa la grandezza degli angoli d' incidenza il divario non può essere che piccolissimo.

429. *Scolio III.* Quanto alla declinazione dell' asta, non v' è bisogno di quadrante per misurarla: Poichè conoscendosi ad ogni immersione l' altezza RN e la lunghezza RC, ben si vede che si conoscerà $\cos.\,\phi = \frac{RN}{RC}$.

Del resto alcune altre avvertenze concernenti l' uso di questo pendolo si aggiungeranno ne' Supplementi; ove pure si spiegherà stesamente il calcolo accennato all' art. 426.

LIBRO QUARTO

DELLE OPERE IDRAULICHE

CAP. I.

Della distribuzione delle acque.

430. Sebbene l' applicazione delle Teorie all' Architettura Idraulica sia per lo più assai facile e spontanea, e d' altra parte per l' infinita varietà de' casi, e per l' intreccio delle circostanze non possa ridursi a regole e precetti determinati; pure non sarà opera perduta il percorrere che faremo in questo Libro alcun di quei casi ne' quali le operazioni pratiche più abbisognano d'essere scorte dai lumi della teoria.

431. Cominceremo dalla distribuzione delle acque che da uno stagno o da un canale si derivano per gli usi dell' agricoltura, e delle arti: materia assai facile, ma che fidata a mani inesperte suol esser feconda di gravi abusi e disordini. E prima diremo esser uso comune lo stabilire una determinata luce sottoposta a un determinato battente d' acqua; l' efflusso da questa luce per un

dato tempo prendesi come unità nella misura delle derivazioni, e dicesi *Oncia d'acqua*.

Variano ne' diversi paesi le misure di questa luce fondamentale, e l'altezza del battente a cui si considera sottoposta. A Parigi è una luce circolare del diametro d'un pollice sotto il battente d'una linea. Nel Milanese è una luce rettangola larga 3 once del braccio milanese, alta 4, sotto il battente d'once 2. Gli efflussi si considerano durare un minuto. Quindi essendo il pollice $=$ 0,02707 metri, e l'oncia del braccio milanese $=$ 0,04958 metri, si troverà (122) che l'oncia d'acqua Francese vale metri cubici 0,012 e la milanese metri cub. 2,18155.

Sapendosi calcolare l'efflusso d'una luce, potrà dunque conoscersi quante once d'acqua ella vaglia; e viceversa potrà aprirsi una luce che scarichi un dato numero d'once d'acqua.

432. Trattandosi ora di ripartir l'acqua fra diverse bocche, potrebbe dimandarsi con qual regola si debban queste costruire, affinchè le loro portate serbino una data proporzione fra loro; e potrebbe richiedersi di più che queste portate abbiano un determinato valore assoluto. Entrambi i problemi si sciolgono senza difficoltà, quando il pelo dell'acqua che alimenta le derivazioni sia

permanente; ma se fosse variabile, si richieggono particolari avvertenze.

433. *Proposizione I.* Estrarre l'acqua d'un recipiente per diverse bocche, in guisa che le erogazioni serbin fra loro una data ragione sotto qualunque altezza del recipiente.

Si dispongano i centri di gravità delle bocche (135) tutti alla stessa profondità sotto la superficie del recipiente; e le loro aree si facciano proporzionali alle erogazioni.

434. *Scolio I.* Purchè s'adempiano queste due prescrizioni, la figura delle luci è indifferente. Ma il miglior partito si è il farle di figura rettangola, tutte della stessa altezza, colle loro soglie orizzontali, egualmente depresse sotto la superficie del recipiente, e con larghezze proporzionali alle erogazioni che debbon fare. Così la distribuzione si mantien giusta ancor quando il pelo del recipiente è sì basso che l'acqua non arriva a coprire l'intera luce.

435. *Scolio II.* Stando a tutto rigore la maggior luce ha sempre qualche vantaggio sulla minore, a motivo dell'attrito dell'acqua contro gli orli, il quale essendo proporzionale al perimetro della luce, cresce meno di quel che cresca l'area, e quindi toglie meno alla maggior bocca che non fa alla minore. Il perchè alcuni Autori prescrivono che tutte le bocche si facciano u-

guali, assegnandone poi a ciascuna derivazione quel numero che è proporzionato alla sua competenza. Ma l'effetto dell'attrito in sì corto spazio è insensibile; solo dovrebbe aversene ragione quando le diramazioni si facessero per lunghi tubi.

436. *Scolio III.* Ben più essenziale è l'avvertenza che tutte le bocche siano egualmente scavate entro la grossezza della pietra o lastra in cui sono scolpite, e che se ad alcuna di esse fosse immediatamente congiunto un breve tubo, o un canale, un simile debbano averne tutte l'altre, onde lo sfogo sia egualmente libero a tutte. Se questo canale sia aperto, ed abbia notabil pendio, basterà che il tratto immediatamente contiguo alla luce per la lunghezza di pochi metri sia simile e similmente applicato a tutte le bocche.

437. *Scolio IV.* Le bocche aperte nelle sponde de' canali o de' fiumi esigono di più l'avvertenza 1.° Di collocarle ne' siti ove il filone cammina parallelo alla sponda. 2.° Di collocarle dopo che l'alveo è stabilito; poichè se il fondo si va rialzando, s'alzerà anche il pelo del fiume, e le bocche superiori rapiranno più d'acqua in pregiudizio delle inferiori; e se il fondo si escava, seguirà il contrario. 3.° Se il pelo alto del fiume non è parallelo al pelo basso,

non sarà possibile il mantenere invariata la proporzione degli efflussi: nè v' è altro compenso fuorchè quello di prender norma dal pelo basso, affinchè il riparto sia giusto nel tempo del maggior bisogno dell' acqua.

438. *Proposizione II.* Regolare una bocca di derivazione in guisa che mantenga costantemente la stessa portata sotto qualunque altezza del recipiente.

Per mezzo d' una cateratta che vada stringendo o ampliando la luce a misura che il pelo del canale s' alza o s' abbassa, è chiaro che può regolarsi qualunque bocca. Ma poichè il giusto maneggio della cateratta esigerebbe un calcolo superiore all' ordinaria capacità di chi regola codeste derivazioni, trattasi di stabilire un termine fisso, che con sicurezza gli avvisi del segno a cui debbono fermare la cateratta in qualunque stato del recipiente.

La miglior soluzione pratica di questo Problema è la seguente. Ricevasi l' acqua che sgorga dalla bocca in un canale di fondo orizzontale, alquanto più largo che la bocca non è, e questo alla distanza di cinque o sei metri s' intesti con un muro, nel quale sia scolpita la luce di tal forma e grandezza che sotto un determinato battente d' acqua fornisca la richiesta erogazione. Ciò posto, dovrà la cateratta regolarsi in guisa

che l'acqua del canale si mantenga sempre a livello dell'assegnato battente; abbassandola tosto che si vede l'acqua oltrepassare il notato segno, o alzandola se non v'arrivasse. Così la portata della luce serberà invariabile la prefissa misura.

Su questo principio è fondata la costruzione delle chiaviche che diramano l'acqua dai Navigli di Milano (*a*).

CAP. II.

Della fermezza de' tubi idraulici.

439. PROPOSIZIONE. Data la pressione p che si esercita sulla sezione d'un tubo ripieno d'acqua stagnante o corrente, dato il suo raggio r, e data la tenacità k della sua materia; trovare la grossezza G che dovrà avere in quella sezione il tubo per resistere allo sforzo dell'acqua.

Sarà la circonferenza di quella sezione $= 2\pi r$; e chiamando q la gravità specifica dell'acqua sarà la somma delle pressioni esercitate su tutti i suoi elementi $= 2\pi pqr$. Ora (I. 133) come la circonferenza al raggio, così sta la suddetta somma delle pressioni alla

(1) *V. Ferrari Opuscoli scelti di Milano. Tom. II. pag.* 73.

tensione delle fibre della sezione stessa. Dunque sarà questa tensione $=pqr$. E questa è la forza che l' acqua esercita per fendere il tubo sulla linea G. Resiste ad essa la tenacità con forza $=kG$. Dunque per l' equilibrio dovrà essere $kG=pqr$. Dalla quale equazione non solo ritrarremo la cercata grossezza G, ma de' quattro elementi p, r, k, G dati tre, conosceremo il quarto.

440. *Scolio*. Chieggasi per esempio la minima grossezza che potrà darsi ad un tubo di piombo del diametro di metri 0,3248 per sostenere l' acqua stagnante all' altezza di metri 32,48.

Prima di tutto conviene accertare la tenacità del piombo. Da una sperienza di Daniello Bernoulli (*a*) si raccoglie che un centimetro quadro di piombo sostiene fino a chil. 220,44. Essendo dunque la tenacità (I. 439) il rapporto tra il peso che arriva a rompere il solido, e la sezion di rottura, sarà

$$k=\frac{220,44}{0,0001}=2204400.$$

Faremo poi $p=32,48$; $r=0,1624$; e (67) $q=1000$, essendosi preso il chilogrammo per unità de' pesi. Introdotti questi va-

(a) *Hydrodyn. pag.* 28.

lori, risulterà $G = 0,00239$ vale a dire pochissimo più d' una linea.

Consente a meraviglia questo risultato coll' esperienza che ne fece Mariotte (*a*). Secondo un altra sperienza di Parent, citata da Bossut (*b*) si richiederebbe maggior grossezza; ma convien dire che Parent non determinasse veramente la grossezza minima che conduce il tubo sull'estremo di schiantarsi. Dal resto è ben naturale doversi abbondare nella grossezza per evitare non pure il rischio della rottura, ma quello dello sfiancamento.

CAP. III.

Della stabilità degli Argini.

441. Quì parleremo degli Argini che sostengono non già l'urto, ma la semplice pressione dell' acqua. Tali son quelli che chiudono le acque stagnanti. Ciò che di questi si dirà, servirà eziandio per gli argini de' fiumi, ove il corso loro sia parallelo alla linea dell' argine; poichè la pression laterale delle acque correnti per gli alvei non è

(a) *Mouv. des eaux Part. V. Diso. II.*
(b) *Hydrod. art. 56.*

guari diversa (226) da quella delle stagnanti.

Da principio riguarderemo l' Argine come un solido di forma invariabile da non potersi spostare se non che per moto progressivo, o per moto rotatorio attorno l' angolo esteriore della base. Considereremo poscia le rotture che potrebbono seguire nel corpo stesso dell' argine.

E perchè torna in vantaggio della stabilità il supporre la spinta alcun poco maggiore del vero, e la resistenza alcun poco minore, supporremo che l' acqua giunga sino al ciglio dell' Argine; e trascurando la tenacità, porremo a calcolo la sola resistenza che dal peso dell' Argine e dall' attrito procede.

442. *Proposizione*. Determinare le condizioni dell' equilibrio tra la pressione dell' acqua, e la resistenza dell' Argine.

Sia $ABCD$ (Fig. 22) la sezione dell' Argine. Esprimendo coll' unità il peso specifico dell' acqua, la pressione contro la scarpa CB esprimesi (41) per $\frac{1}{2}\, CB \,.\, CX$ ed agisce sul centro di pressione P, posto (50) ai due terzi della CB, contando da C. Spingendo questa forza normalmente alla CB, prendasi la linea PR per rappresentarla, e decompongasi nelle due spinte, PQ orizzontale, e QR verticale.

Ora in quanto al moto progressivo, men-

tre la forza PQ tende a spostar l' argine, resiste a questa forza l' attrito che esso dovrebbe soffrire scorrendo sulla linea AB. Quest' attrito è proporzionale alla pressione che l' argine esercita sulla sua base, e questa pressione, se dicasi M il peso dell' argine, sarà $= M + QR$. Quindi essendo f il coefficiente dell' attrito, sarà la resistenza $f.QR + fM$.

E quanto al moto rotatorio, la forza PQ col momento $PQ.PS$ tende a rovesciar l' argine attorno l' angolo A. Resiste a questa rotazione la forza QR col momento $QR.AS$, ed il peso M col momento $M.AN$.

Affinchè dunque siavi equilibrio dovrà essere

$$PQ = f.QR + fM$$

$$PQ.PS = QR.AS + M.AN$$

443. *Coroll. I.* Esprimiamo queste condizioni analiticamente. Suppongo la sezione dell' argine trapezia, ed eguali le due scarpe interna ed esterna. Sia $CX = a$, $CD = b$, $BX = AY = p$, ed il peso specifico della materia dell' Argine $= G$. La similitudine de' triangoli PRQ, CBX dà

$$PR : PQ : QR :: CB : CX : BX$$

onde essendo $PR = \frac{1}{2} CB.CX$ si troverà

$PQ = \frac{1}{2} a^2$, e $QR = \frac{1}{2} ap$. Sarà inoltre

$PS = \frac{1}{3} a$, $AS = b + \frac{5}{3} p$, $M = aG(b+p)$,

$AN = \frac{1}{2} b + p$. Onde le nostre equazioni divengono

$$\frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} afp + afG(b+p)$$

$$\frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{2} abp + \frac{5}{6} ap^2 + aG\left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{3}{2} bp + p^2\right)$$

444. *Coroll. II.* Ciò pel puro equilibrio. Ma l'intera sicurezza dell'argine vuole che in ciascuna di queste equazioni il secondo membro sorpassi il primo, e quanto più sarà l'eccesso, tanto sarà maggiore la stabilità.

445. *Coroll. III.* Giova osservare il particolare vantaggio che dà alla robustezza degli argini la scarpa interna; poichè essa senza punto aumentare la spinta orizzontale dell'acqua, ne accresce la spinta verticale, la quale concorre insieme col peso dell'argine a tenerlo fermo sulla sua base.

446. *Scolio I.* Dichiariamo con qualche esempio l'uso delle formole. Sia una sponda di muro colle due scarpe ciascuna d'un sesto dell'altezza, e questa debba sostener l'acqua all'altezza di 6 metri. Si domanda la grossezza b che dovrà avere pel puro equilibrio.

Faremo la gravità specifica del muro $G = 1,714$; ed il coefficiente dell' attrito $f = 0,75$; di più $a = 6$, $p = 1$; e la prima equazione richiederà $b = 1,042$; per la seconda basterebbe $b = 0,899$.

Il sig. Bossut (a) considera la stabilità degli argini soltanto in riguardo al moto rotatorio. Pur quest' esempio ci fa apprendere che il rischio è maggiore rispetto al moto progressivo.

447. *Scolio II.* Altro esempio. Suppongasi $b = 0$, cosicchè l' argine termini a cresta, e si domandi, essendo l' argine di terra, quale scarpa si dovrà dargli onde sostenga l' acqua all' altezza a.

Faremo la gravità specifica della terra posta in argine $G = 1,428$; e posto come sopra $f = 0,75$ la prima equazione richiederà $p = 0,346\, a$; per la seconda basterebbe $p = 0,272\, a$. Stando adunque al valor maggiore, scorgesi che il piede della scarpa dovrà avere all' incirca li sette ventesimi dell' altezza, e tutto il piede dell' argine li sette decimi.

Per più ragioni non converrebbe in pratica terminar l' argine a cresta; ma frattanto da quest' esempio si vede che con una scar-

(a) *Bossut et Viallet Rech. sur la constr. des Digues* §. *IX.*

pa di sette ventesimi dell'altezza la solidità dell'argine è bastevolmente assicurata, qualunque siasi la sua grossezza. Molto più lo sarebbe se avesse una scarpa più dolce. Siccome adunque agli argini di terra si dà una scarpa per lo meno eguale all'altezza, sono essi abbastanza sicuri, per poco di grossezza che s' abbiano. E se pure si costuma d' ingrossarli, convien dire che s'abbia in vista il pericolo delle corrosioni, che scarnando l'argine potrebbono sollecitamente fiaccarlo in guisa da non lasciar tempo al riparo.

448. *Scolio III.* Dubita il sig. Bossut, se l' argine, quantunque abbastanza fermo per reggere sulla sua base *A B*, non possa per avventura rompersi in qualche altra sezione, come sarebbe in *a b*, staccandosi il pezzo superiore *a D C b* dall' inferiore *A a b B*, col rotare intorno al punto *a*, o collo scorrere da *b* verso *a*. Pure dalle equazioni proposte (443) si deduce facilmente che passando dall' intero argine *A D C B* al pezzo superiore *a D C b*, la spinta ed il suo momento scemano in maggior proporzione che non fa la resistenza ed il suo momento. Onde se l' argine intero ha resistenza sufficiente a reggere sulla sua base *A B*, molto più ciascun pezzo come *a D C b* reggerà sulla sezione *a b* che gli fa base, nè vi sarà pericolo di rottura.

449. *Scolio IV*. Ciò per altro si deve intendere quando la terra sia talmente compatta ed assettata, che non permetta l'irregolare trapelamento dell'acqua entro il còrpo dell'argine. Il trapelàmento d'un sottilissimo velo d'acqua può esser fatale all' argine il più robusto, e dai prinçipj dell' idrostatica (42) ben se ne ravvisa la cagione. Poichè si vede che il pezzo d'argine superiore alla falda interna bagnata sarà spinto all'insù con tanta forza quant'è il peso d'una colonna d'acqua che abbia per base quella falda, e per altezza la profondità del suo centro di gravità sotto il livello dell'acqua esterna.

CAP. IV.

De' Ripari opposti all' urto della corrente.

450. PROPOSIZIONE. Se l'argine o riparo qualunque $ABCD$ (fig. 22) oltre la pressione soffra anche l'urto dell'acqua che lo investa con velocità dovuta all'altezza s, e con angolo d'incidenza k, si cercano le condizioni dell'equilibrio tra la spinta dell' acqua, e la resistenza dell'argine.

Supporremo che la forza dell'urto agisca sul punto di mezzo della CB. Essa forza si

esprimerà (315) per $2\,CB \,.\, s \,\text{sin.}\, k^2$, e risolvendola come all'articolo 443 ne nascerà la spinta orizzontale $2\,a\,s\,\text{sin.}\,k^2$, e la spinta verticale $2\,p\,s\,\text{sin.}\,k^2$. Riferiti poscia i momenti di queste forze al punto A, riesce il momento della spinta orizzontale $= a^2\,s\,\text{sin.}k^2$, ed il momento della spinta verticale $= p\,s\,\text{sin.}\,k^2\,(2\,b + 3\,p)$. Pertanto le due equazioni dell'art. 443 si adatteranno al caso presente, aggiungendovi ne' primi membri i termini $2\,a\,s\,\text{sin.}\,k^2$, $a^2\,s\,\text{sin.}\,k^2$ rispettivamente, e nei secondi membri i termini $2\,p\,s\,\text{sin.}\,k^2$, $p\,s\,\text{sin.}\,k^2\,(2b + 3p)$.

451. *Corollario*. Quì pure apparisce colla maggiore evidenza il vantaggio che dà a questi ripari la scarpa interna. Se il piede della scarpa è maggiore dell'altezza del riparo, l'urto dell'acqua ben lungi dall'infievolirne la resistenza, concorre ad avvalorarla. Un altra utilità della scarpa interna si è il rintuzzare l'azione de' vortici che scalzando il fondo su cui posa il riparo ne minacciano la ruina.

452. *Scolio I.* Non si può errare gran fatto nel supposto che l'urto dell'acqua operi sul punto di mezzo della CB. Veramente il centro de la resistenza dovrebbe cader più basso (393) se la velocità della corrente fosse per tutto uguale; ma essendo questa ordinariamente maggiore verso la superficie,

il centro della resistenza non potrà guari scostarsi dal punto di mezzo.

453. *Scolio II.* Quanto al valore dell'urto, noi l'abbiam calcolato per la Teoria Neutoniana. Nel che vuolsi riflettere 1.° che se l'angolo d'incidenza fosse molto acuto, questo valore dovrebbe correggersi giusta l'art. 354. 2.° che il valore assoluto dell'urto dedotto dalla formola di Neuton è (350) troppo grande, e può aversi piuttosto come il limite massimo di questa forza. 3.° che per giudicar rettamente della solidità d'un riparo in ordine all'equilibrio tra il suo peso e le forze dell'acqua, non dee tralasciarsi di considerare le forze che agiscono sulla faccia posteriore di esso. Questa talvolta è nuda, talvolta sostenuta dall'acqua, talvolta rinfiancata da un terrapieno. Generalmente, trovandosi il riparo tra due opposte pressioni, converrà proporzionare la sua resistenza all'eccesso dell'una sopra dell'altra, o piuttosto alla maggiore di esse, giacchè potrebbe o l'una o l'altra per avventura mancare.

454. *Scolio III.* Vi sono dei ripari che traggono la robustezza loro non tanto dal peso, quanto dalla coerenza delle parti che li compongono sia tra loro, sia col suolo. Tali sono i ripari composti o gueriti di palificate. La resistenza loro può considerar-

sì come invincibile, finchè regge il fondo ove son fitti. Ma se il fondo si smove, perdono affatto ogni forza. E però mal convengono nei letti istabili de' fiumi che corrono in ghiaja. Ne' fiumi arenosi, se pure il terreno abbia bastante sodezza, son più sicuri, purchè siano garantiti da' vortici. Ai quali non v'è difesa migliore del ricoprire la base del riparo con una scarpa il più che si può avanzata entro il fiume.

455. *Scolio IV.* Meritano particolar considerazione i pennelli, sorta di ripari destinati a fermare le corrosioni. Di questi sarebbe a cercare la forma più conveniente sia per resistere all'urto dell'acqua, sia per volgere il corso principale del fiume o a tenersi nel mezzo, o ad intaccare l'alluvione opposta. Ma troppi dati ci mancano per risolvere questi Problemi senza assumere delle ipotesi arbitrarie.

L'uso più comune è di farli rettilinei, ed inclinati ad angolo ottuso colla ripa superiore. Così soffrono meno urto dall'acqua, rivolgono più efficacemente il filone alla sponda opposta, sono meno tormentati da' vortici, e l'acqua dietro il pennello meno agitata più sollecitamente lo rincalza colla deposizion delle torbide.

456. *Scolio V.* Circa la direzione più vantaggiosa del pennello all'effetto di volgere

il filone ad un dato punto, non altro saprei prescrivere salvo che questa direzione vada a battere alquanto al di sopra del punto a cui vuol voltarsi il filone. Poichè tutta l'acqua che trovasi in dirittura del pennello rivolge il suo corso con notabile velocità (400) lungo la direzione del pennello stesso. Ora se questa corrente fosse libera, proseguirebbe colla stessa direzione; ma poichè incontra l'acqua residua del fiume, si andrà distornando e rivolgendo all'ingiù secondo una curva, la quale sarebbe una parabola se le velocità del fiume fossero eguali per tutta la sezione, ma poichè sono diverse, devierà più o meno dalla linea parabolica. Ad ogni modo si vede che il corso principale si volgerà per una curva che avrà per tangente la linea del pennello.

CAP. V.

Delle nuove inalveazioni.

457. Sebbene le nuove inalveazioni si considerino principalmente negli Alvei dei fiumi naturali alterabili per l'azione dell'acqua, nulladimeno per mettere in più chiara vista la natura del Problema gioverà sup-

porre dapprima l'Alveo inalterabile e passar poscia agli Alvei capaci di corrosione e d'interrimento. Per non accrescer poi inutilmente le difficoltà, supporremo che si conservi al nuovo cavo la stessa larghezza del vecchio, e che questa larghezza sia, com'esser suole, assai grande rispetto alla profondità dell'acqua.

458. *Proposizione I.* Inalveandosi un tronco di dato fiume per una data linea, determinare le condizioni del nuovo Alveo.

Ridotto all'equabilità il corso dell'acqua pel nuovo letto; dovranno valere per esso le due equazioni dell'art. 241. Nelle quali conoscendosi le tre quantità Q, l, Φ potremo determinare le due rimanenti u; ed y. E così sapremo con quale velocità e con quale altezza di pelo correrà l'acqua pel taglio. Il che etc.

459. *Proposizione II.* Lo stesso Problema, supponendo l'Alveo alterabile.

La pendenza conveniente all'alveo stabilito dipende (294, 296) con certa legge dalla portata, dalla tenacità del suolo, e dalla torbidezza del fiume. Sia (V), l'equazione che esprime codesta legge. Ridotto il nuovo Alveo a corso uniforme e stabile, dovrà valere per esso oltre le due equazioni dell'art. 241. anche l'equazione (V). Conoscendosi adunque i due elementi Q, l que-

ste tre equazioni daranno a conoscere i tre rimanenti φ, u, y.

460. *Coroll. I.* Adunque nelle inalveazioni de' fiumi naturali non è punto arbitraria la pendenza da darsi al nuovo letto. Se questa si facesse soverchia, il fiume spianarebbe coll'escavazione il nuovo fondo, e se troppo scarsa, lo rialzerebbe cogl' interrimenti. E gli argini che fiancheggiano il taglio diverrebbon ben tosto o soverchi o insufficienti al bisogno.

461. *Coroll. II.* Ma noi sappiamo bensì dover esistere tra la pendenza del fiume, la sua portata e gli altri elementi sopra detti quella relazion costante che abbiamo indicata col simbolo (*V*); ma nè la teoria nè la sperienza non ci ha fino ad ora fatta conoscere generalmente questa legge. Quindi nasce difficoltà nell' applicazione del metodo precedente. Per supplire a questo difetto convien ricorrere ad osservazioni locali.

Si livelli adunque colla maggiore esattezza la pendenza del fiume ne' siti non affetti da resistenze locali, e di fondo il più che sia possibile omogeneo a quello per cui dovrà correre il nuovo letto. Sarà questa la cadente che ad esso conviene.

462. *Coroll. III.* Fissata dunque la soglia dello sbocco, lungo la traccia della nuova linea si conduca all' insù il fondo del taglio

con quella pendenza che si sarà così determinata. Su questo fondo il fiume prenderà corso stabile ed uniforme, con quell' altezza medesima che competeva al vecchio fiume ne' tratti di ugual pendenza.

463. *Coroll. IV.* Protratto il nuovo fondo sino al punto della diversione, o coinciderà col fondo del fiume, o rimarrà più basso, o più alto. Nel primo caso l' alveo superiore al taglio non risentirà veruna alterazione.

Nel secondo caso tutto il letto superiore del fiume dovrà per se stesso abbassarsi sino ad unirsi col fondo del taglio, disponendosi in una superficie parallela al fondo vecchio, ma tanto più bassa quanto il fondo del taglio resta inferiore al fondo del fiume. Che se quest' effetto vogliasi impedire, o ritardare, a scanso degli sconcerti che potrebbon nascere da un precipitoso abbassamento, ciò potrà ottenersi coll' attraversare il fiume con una chiusa o stabile, o da potersi a poco a poco abbassare.

Nel terzo caso seguirà effetto contrario a quel del secondo, come è palese.

464. *Scolio I.* Le nuove inalveazioni o si fanno senza cangiare lo sbocco al fiume, o con portarlo ad altro sbocco. Le prime propriamente si dicono *Rettificazioni* o *Tagli*; le seconde *Diversioni*. Convengono ad entrambe gl' insegnamenti che abbiam dato.

Soggiungeremo ora alcune particolari avvertenze circa le diversioni, rimettendo per istruzione più ampia al Guglielmini nel Cap. XIV. della Natura de' fiumi, ed al Manfredi nelle Annotazioni a quel Capo, e nella Risposta a Ceva e Moscatelli Cap. XVII.

465. *Scolio II.* Ne' progetti di nuove diversioni il punto più difficile si è il fissar precisamente il fondo o soglia dello sbocco, dal qual fondo deve (462) poi condursi all'insù l'escavazione del nuovo letto. Nel che la Teoria non ci porge veruna norma. Ma l'osservazione c'insegna che le foci de' fiumi naturali si stabiliscono a qualche profondità sotto il pelo basso del recipiente; profondità diversa ne' diversi fiumi, ma che anche pe' fiumi reali di maggior portata non oltrepassa pochi piedi.

Fisseremo adunque il fondo dello sbocco in un punto alquanto più basso del pelo infimo del recipiente; prendendo per ciò norma dalla profondità della vecchia foce, o da quella di qualche altro fiume di non dissimil portata.

466. *Scolio III.* Ma quand'anche la profondità della foce possa assegnarsi coll' ultima precisione, non perciò viene a togliersi ogni incertezza sul punto stabile dello sbocco. Poichè o il fiume ha esito in un altro fiume, o nel mare. Nel primo caso

converrebbe prevedere l' alterazione che soffrirà il pelo basso del recipiente per l' aggiunta delle nuove acque; alterazione che non può con tutto rigore determinarsi. Nel secondo caso convien riflettere che l'ultimo tronco del fiume non avrà bisogno d' alcuna pendenza (301) per tutto quel tratto nel quale le piene risentono la chiamata dello sbocco. Adunque condotta un orizzontale pel fondo della Foce, e prolungatala sino a quel punto a cui si giudica potersi estendere la chiamata dello sbocco, da questo punto dovrebbe condursi all' insù la cadente del nuovo fondo. Ma non essendovi regola per conoscere sin dove s' estenda l'anzidetta chiamata, la determinazione di quel punto non può aversi che per una stima pressochè arbitraria.

467. *Scolio IV.* Da tutto ciò ben si vede che sarebbe vana presunzione il darsi a credere di poter preparare al nuovo Alveo quel fondo che la di lui natura richiede precisamente, non soggetto a vicende d'escavazione o di riempimento. E basta bene che dalle osservazioni precedenti si conoscano a un di presso i limiti entro i quali si conterrà il nuovo letto.

Nella quale incertezzza gioverà tenere per massima esser meglio che l' alveo disegnato riesca anzi più alto che non più basso del

dovere; onde debba piuttosto maggiormente profondarsi con vantaggio degli scoli, e con minor pericolo degli argini, che non elevarsi con pregiudizio degli uni e degli altri.

CAP. VI.

Dell' unione de' fiumi.

468. P*roposizione* I. Portandosi un dato fiume a sboccare in un altro pur dato, si cercano le condizioni dell' Alveo comune, supponendolo inalterabile.

Applicando all' Alveo comune le due equazioni dell' art. 241 scorgesi che in esse saranno dati gli elementi l, Φ ed anche Q che sarà la somma delle portate de' due fiumi. Per esse adunque determineremo u ed y. Il che etc.

469. *Proposizione II.* Lo stesso Problema', supposto l' Alveo alterabile.

Qui alle equazioni dell' art. 241 dovrà aggiungersi (459) l' equazione (V). Onde conoscendosi Q ed l, si potranno determinare Φ, u, ed y.

470. *Coroll. I.* Ma qui di nuovo c' imbarazza la mancanza dell' equazione (V). Nè può supplirsi a questo difetto coll' osserva-

zione (461) istituita sul fiume stesso; poichè la pendenza che conviene al fiume solitario non può convenire ai fiumi uniti, stante la diversità delle portate.

Propose il Frisio (a) questa regola, che la pendenza del recipiente cos. Φ scemerà dopo la confluenza in ragione reciproca della portata. Onde se la portata si raddoppi, cos. Φ si ridurrà alla metà. Ma chi può fidarsi d' una regola ricavata da due sole osservazioni? E queste medesime perdono ogni fede per l' incertezza del metodo che ha tenuto il Frisi nello stabilire la proporzione delle portate.

Il Sig, Prof. Giambattista Guglielmini richiamando ad esame la regola del Frisio sui dati delle portate calcolate dal Frisio medesimo, la trovò in molti casi fallace. Meno lontano dal vero si andrebbe, secondo lui, stimando le pendenze in ragione reciproca subduplicata delle portate.

Ma tuttavia gioverà piuttosto prender norma dalla pendenza di qualche altro fiume di portata prossimamente eguale a quella de' due fiumi uniti. Bensì converrà avvertire che la tenacità del suolo, e la quantità e qualità delle materie sieno prossimamente le stesse.

(a) *Istituzioni di Meccanica etc. Lib. VI. Cap. 6.*

471. *Coroll. II.* Sebbene le indicate difficoltà ci tolgono di potere apprezzare precisamente gli effetti dell' unione, non è però che non se ne ravvisino chiaramente i vantaggi. Poichè egli è certo che l' Alveo del recipiente dopo la confluenza richiederà minor pendenza di prima. Quindi si abbasserà il suo fondo; col quale abbassamento andrà pure congiunto quello di tutto il fondo di sopra.

Perciò nel tronco superiore le piene si terranno più basse di prima relativamente ai piani delle campagne. Può dubitarsi se fia per seguire lo stesso nel tronco inferiore; poichè l' elevazione del pelo per l' aggiunta delle nuove acque potrebbe compensare l' effetto dell' abbassamento del fondo. Pure l' esperienza (*a*) ci mostra che più vale a tener bassa la superficie del fiume l' escavazione del fondo di quello che l' alzamento del pelo ad elevarla.

472. *Coroll. III.* Accresciuto il fiume delle acque dell' influente, o sia che si porti al mare, o ad altro termine, non può fare che in grazia della maggiore portata non richiegga anco maggior profondità della foce. Per conseguenza abbasserà di qualche poco il fondo del suo sbocco. E quindi nascerà

(a) *Guglielmini Nat. de' fiumi Cap. IX. prop. 4.*

ulteriore escavazione di tutto il fondo dell' Alveo superiore alla confluenza, con nuovo vantaggio di esso Alveo.

473. *Scolio*. Per ottener pienamente dall' unione de' fiumi gl' indicati vantaggi, due condizioni si ricercano. 1.° Che le loro piene siano per l' ordinario contemporanee: altrimenti l' Alveo de' fiumi uniti non potrà ridursi a quella minor pendenza che corrisponde alla somma delle portate. 2.° Che l' influente non porti al punto dell' unione materie più gravi di quelle che vi porta il recipiente: altrimenti potrà darsi il caso che l' Alveo comune in vece di richiedere minor pendenza, la richiegga maggiore in grazia della maggior resistenza del fondo.

474. *Proposizione III.* Inalveandosi un fiume per una nuova linea, cosicchè debba ricevere in dati punti uno o più dati influenti, si cercano le condizioni del nuovo Alveo.

Dalla soglia dello sbocco si condurrà all' insù la cadente del fondo con quella pendenza che si giudica convenire alla portata del fiume accresciuto di tutti gl' influenti, e si prolungherà sino allo sbocco dell' influente ultimo; indi si proseguirà sino allo sbocco del penultimo con quella maggiore pendenza che conviene alla portata diminuita dell' ultimo influente; e così in seguito,

sino ad incontrare il principio della diversione. Nel che si osserveranno le regole ed avvertenze in questo e nell' antecedente Capo spiegate.

475. *Corollario*. Condotta con questa regola la cadente del nuovo alveo, si vedrà quanto essa rimanga più alta o più bassa del fondo del fiume al punto della diversione, e del fondo degl' influenti che incontra per via. Dal che si potrà giudicare delle mutazioni che si faranno e nel tronco superiore e negl' influenti, per quanto l' incertezza de' dati il consente. Se non altro si conosceranno i limiti di questi effetti, dai quali si potrà formare un prudente giudicio sui vantaggi della proposta inalveazione.

C A P. VII.

De' Canali di Scolo.

476. Gli Alvei de' condotti di scolo ponno ordinariamente riguardarsi come inalterabili; poichè le acque loro essendo poche e chiare non ponno guari nè escavare il fondo, nè interrirlo, Ciò avvertito, passeremo ora ad indicare brevemente le condizioni che si ricercano per la bontà d'uno scolo, e i mezzi di riconoscerle e d'ottenerle.

477. *Proposizione I.* Acciò un terreno abbia scolo in un dato recipiente, ricercasi in primo luogo, che la superficie del terreno sia sempre ed in ogni sua parte superiore al pelo del recipiente, ove questi riceve lo scolo.

478. *Scolio I.* Per le pianure che scolano ne' fiumi arginati, raro è che questa condizione trovisi pienamente adempiuta. Pure lo scolo non si reputa del tutto infelice, qualora il terreno rimanga alcun poco superiore al pelo ordinario del fiume. Bensì nelle escrescenze resterà trattenuto lo scolo a tutta quella campagna che giace sotto il pelo massimo del recipiente; ma cessata la piena, ripiglierà l' acqua il suo corso.

479. *Scolio II.* In questo caso converrà che lo scolo sia arginato. Il ciglio degli argini dovrà esser tirato a livello del pelo massimo del recipiente. Poichè o lo scolo sbocca a foce aperta, o è difeso con chiavica. Nel primo caso l' acqua del fiume rigurgiterà per lo scolo a livello del suo pelo massimo. Nel secondo caso, chiudendosi la chiavica, l' acqua si accumulerà nell' infimo tronco dello scolo; non potrà mai però elevarsi al di sopra del pelo massimo del recipiente, poichè allora riaprendo la chiavica, vi avrebbe sfogo.

480. *Proposizione II.* Acciò un terreno

abbia scolo in un dato recipiente, si ricerca in secondo luogo, che il pelo massimo del condotto rimanga per tutto inferiore alla superficie del terreno.

481. *Coroll. I.* Volendosi esaminare se un proposto canale di scolo sia per adempiere questa condizione, si terrà il metodo seguente. Cerchisi la massima copia d'acqua che per piogge, sorgive od altro si spande sul terreno in un minuto secondo, e sia questa quantità $= Q$. Sarà la portata massima del condotto $= Q$. Conoscendosi poi la sua larghezza l, e la pendenza Φ, l'equazione dell'art. 254 darà a conoscere la y, altezza viva dell'acqua nello scolo. Quindi potrà segnarsi il suo massimo pelo, che paragonato coi fondi delle campagne darà a conoscere se resti tutto sepolto sotto le medesime, o se sopravanzi ad alcune.

Quando lo scolo avesse più tronchi fra loro diversi di pendenza, di larghezza, e di portata, dovrà quest'esame istituirsi separatamente per ciascun tronco.

482. *Coroll. II.* Trovandosi difetto, converrà adattare il canale o coll'accrescerne la larghezza o col diminuirne la pendenza. Colla prima operazione viene a sminuirsi l'altezza viva y; colla seconda, escavandosi il fondo, quantunque l'altezza y s'aumenti, pure il pelo si riduce più basso rispetto

ai piani delle campagne adjacenti. Le circostanze locali suggeriranno qual delle due correzioni debba prescegliersi.

Ma la cadente dello scolo non può guari scostarsi da quella delle campagne che attraversa, onde ordinariamente converrà meglio accomodare ai bisogni dello scolo la larghezza l. Or nell' equazione (254) presi per dati Q e φ non sarà difficile determinare la l in guisa che y non oltrepassi il richiesto limite.

483. *Proposizione III.* Unendosi due scoli in un solo canale, determinare gli effetti dell' unione.

Avremo per l' alveo comune gli elementi φ, l, ed anche Q che sarà la somma delle portate massime de' due scoli confluenti. Quindi l' equazione (254) ne farà conoscere y. Determinato così il pelo massimo dell' alveo comune, il suo confronto coi piani delle campagne darà a vedere se l' unione sia per essere innocua o dannosa.

Di più condotta un orizzontale per la sommità dell' altezza determinata y nel punto della confluenza, il rigurgito farà sollevare sino al livello di questa orizzontale il pelo d' entrambi gli scoli confluenti. Paragonando questo pelo coi piani delle campagne che immettono le loro acque nei due scoli su-

periormente alla confluenza, riconosceremo se ne abbian danno.

484. *Coroll. I.* Risultando alcun pregiudicio dalla progettata unione, è facile il rimedio coll' allargare l'alveo del recipiente in modo che l'altezza viva di esso per l'unione delle nuove acque non cresca. La misura dell' allargamento si calcolerà come sopra (482).

485. *Coroll. II.* Perciò la quistione proposta dal Guglielmini (*a*) se l'unione degli scoli sia o nò vantaggiosa, parmi potersi generalmente risolvere per l'affermativa. Poichè è facile il vedere che la larghezza *l* conveniente a rendere innocua l'unione di due scoli riuscirà sempre minore della somma delle larghezze che dovrebbero avere per condursi separati al loro termine.

CAP. VIII.

Dei Canali di navigazione.

486. La condotta dei canali di navigazione e di tutte le loro appartenenze esige il concorso della più profonda Teoria, e della pratica più consumata. Noi non in-

(a) *Natura de' fiumi Cap. XI. sul fine.*

traprenderemo di racchiudere in un breve Capitolo ciò che sarebbe argomento d'ampio Trattato. Saremo contenti d'indicare quelle considerazioni che al bisogno della navigazione strettamente si riferiscono.

487. *Proposizione I.* L'altezza dell'acqua nel Naviglio, e la sua portata debbono mantenersi a un di presso costanti.

Poichè se l'altezza dell'acqua crescesse notabilmente sopra il pelo medio, essa per tacer d'altri inconvenienti sormonterebbe le ripe; le quali deggion esser basse per dar luogo al tiro delle barche; e se notabilmente scemasse, lascierebbe in asciutto le barche stesse. Se poi l'altezza è costante, dev'esserlo eziandio la portata.

488. *Proposizione II.* Determinare l'altezza dell'acqua conveniente al Naviglio.

Dipende questa dalla grandezza e dal carico delle barche alle quali si destina il canale; dovendo essere eguale all'altezza di cui queste pescano in acqua, con di più quell'intervallo che dee rimanere tra il fondo della barca e quello del canale, affinchè non s'accresca la resistenza; intervallo che dovrebb'essere per lo meno di mezzo metro.

489. *Scolio I.* Accade il più delle volte che la portata del canale è troppo scarsa o la sua caduta è troppo grande per mantener

viva codesta altezza. Quindi la necessità de' sostegni; per mezzo de' quali si diminuisce la pendenza al fondo del canale per accrescere quanto occorre l' altezza dell' acqua, ripartendosi il rimanente della caduta fra i sostegni medesimi.

490. *Scolio II.* Il numero de' sostegni è prossimamente determinato dall' altezza della caduta che rimane a distribuire, giacchè ogni sostegno non dovrebbe avere più di tre metri di caduta. La loro collocazione è indicata dalla località, e questa pure consiglierà dove convenga isolarli e dove farli contigui, o come dicono accollati.

491. *Scolio III.* Quando la portata del canale è scarsissima, divien necessario togliere ogni pendenza al fondo del canale; allora la navigazione si fa ad acqua stagnante, e l' altezza dell' acqua diviene indipendente dalla portata.

492. *Proposizione III.* Determinare la portata necessaria al Naviglio.

Essendo data la larghezza l e la pendenza ϕ del canale, e determinata l' altezza y dell' acqua da mantenersi, l' equazione (254) farà conoscere la richiesta portata Q.

493. *Scolio I.* Quando la navigazione si fa (491) ad acqua stagnante, la determinazione della portata dee ripetersi da altri principj. Si rifletta che in questo caso se non doves-

sero mai aprirsi le porte de' sostegni, nè si facesse altra dispersione dell' acqua, riempiuto una volta il canale, non vi sarebbe bisogno d' influsso perenne per mantenerlo a quell' altezza in cui si fosse da prima costituito. Nasce questo bisogno principalmente dal consumo d' acqua che si fa ogni volta che s' aprono le porte de' sostegni pel passaggio delle barche.

Ora è facile il vedere che ad ogni tragitto d' una barca si estrae dal tronco superiore del canale un prisma d' acqua che ha per base la superficie della conca, e per altezza la caduta del sostegno. Dicasi la superficie della conca S, e la caduta del sostegno A; ogni barca consumerà un prisma d' acqua AS. E se il numero delle barche che giornalmente tragittano il sostegno pongasi $= 2m$, sarà il consumo giornaliero del sostegno $= 2m\,AS$.

494. *Scolio II.* Il consumo de' sostegni contigui si determina come segue. Siano i sostegni accollati in numero n. Ogni barca che monta estrae dal canal superiore un numero n de' prismi AS, ma per ogni barca che discende basta un solo di questi prismi, il quale successivamente si trasfonde da una conca nell' altra. Quindi se nel numero giornaliero $2m$ delle barche si supponga che la metà discenda, e la metà rimonti il

canale, il consumo sarà $= m (n + 1) A S$.

495. *Scolio III.* Ma ne' sostegni accollati talvolta si costuma di tenere affatto vuote le conche, quando le barche non passano, a riserva dell' infima comunicante col canale inferiore. Il che si fa per non caricare troppo lungamente le porte. Questa circostanza accresce (*a*) il consumo dell'acqua. Per intenderne la ragione osserviamo che mentre la barca scende dalla prima conca nella seconda, è necessario che resti nella prima conca tant' acqua quanta occorre per sostenere il battello acciò non rada il fondo. Dicasi B l' altezza d' acqua a ciò necessaria. Dovrà dunque estrarsi dal canale superiore oltre il prisma $A S$ anche l' altro prisma $B S$ che deve rimanere nella prima conca dopo che l' altro $A S$ s' è trasfuso nella seconda. E similmente nel salire da una conca all' altra, non solo dovrà introdursi nella prima il prisma $A S$, ma anche nella seconda il prisma $B S$, onde possa la barca entrarvi.

Ciò posto, tenendo dietro alla trasmissione dell' acqua, si vedrà facilmente che per la discesa d' una barca in un sostegno doppio, l' estrazione dovrà essere $A S + B S$, nel triplo $A S + 2 B S$. E quanto alla di-

(a) *Ducros Mem. sur les quantités d' eau qu' exigent les Canaux de Navig. Paris. An. IX.*

scesa, questa estrazione $AS + 2BS$ basta poi per qualunque sia il numero de' sostegni, trasmettendosi insieme colla barca dall' una conca nell' altra. Ma per la salita, se il numero de' sostegni è n, l'estrazione sarà $nAS + (n-1)BS$.

Ritenendo adunque il supposto che m barche giornalmente discendano, ed altrettante rimontino, sarà il giornaliero consumo pel sostegno doppio $3mAS + 2mBS$, e per qualunque numero de' sostegni accollati maggior del due, sarà $= m(n+1)(AS + BS)$.

496. *Scolio IV.* Oltre il consumo de' sostegni deve un perenne influsso d'acqua nel canale risarcire altre perdite. Sono esse 1.° L'evaporazione: questa per alcune sperienze fatte nel canale di Lingnadocca ammonta annualmente a un prisma d'acqua che avendo per base la superficie del canale abbia met. 0,8 d'altezza. 2.° La filtrazione o assorbimento dell'acqua nel fondo e nelle sponde porose del canale: questa varia moltissimo secondo la natura del suolo; è maggiore ne' canali nuovi, e va scemando a misura che gli argini s'assodano e che il limo s'infeltra ne' pori; nel canale di Linguadocca stimasi q esta perdita stare a quella dell'evaporazione come 3 a 2. 3.° Le derivazioni: giacchè l'acqua che dal canale si deriva non può restituirsi se non se per

avventura nel tronco inferiore, oltrepassato un sostegno.

Dalla somma di tutte queste quantità risulta la portata costante necessaria a ciascun tronco del canale, per mantenervi la navigazione senza interrompimento.

497. *Scolio V.* Determinata la portata necessaria al Naviglio, resta a vedere il modo di mantenerla costante. Nel che è da provvedere così al difetto come alla soprabbondanza dell' acqua.

Al difetto della portata si soccorre col raccogliere nelle stagioni piovose l' acqua soverchia, riducendola in ampj serbatoi, ove se ne fa conserva per supplir poi all' alimento del canale ne' mesi asciutti.

498. *Scolio VI.* All' eccesso della portata provveggono 1.° le porte praticate nell' incile del canale. 2.° gli scaricatori a fior d' acqua. 3.° i paraporti, o sia chiaviche aperte nella sponda del Naviglio colla soglia più bassa del fondo di esso. Gli effetti di questi rimedj ponno agevolmente ridursi a calcolo (101. 136). E quindi potrà vedersi a qual segno convenga moltiplicarli per isfogare le maggiori escrescenze.

499. *Scolio VII.* Per ultimo è da curare il fondo del Naviglio col tenerlo sgombro o dagl' interrimenti, se l' acqua n' è torbida, o dall' erbe palustri, se è chiara. A queste

la sola opera manuale può provvedere. Agl' interrimenti occorrono. 1.° I paraporti anzidetti; grandissima è la loro efficacia, e quando posson collocarsi in vicinanza dell' incile servono mirabilmente a riportare nel fiume le materie grosse che le piene spingono entro l' alveo del canale, e a mantenere sgombra la sezion dell' incile e il corso dell' acqua rivolto verso il medesimo. 2.° L'aprire di tempo in tempo le porte de' sostegni, onde l' acqua col suo corso libero sgombri que' sedimenti che pel ristagno delle porte si fossero accumulati. 3.° L' escavazion manuale, che si pratica all' uopo, levando l' acqua al Naviglio.

LIBRO QUINTO

DELLE MACCHINE IDRAULICHE.

SEZIONE PRIMA

Delle Macchine elevatrici dell' acqua.

CAP. I.

Della Tromba aspirante.

500. PROPOSIZIONE I. Spiegare l'aziono della Tromba aspirante.

Lo stantuffo OL (Fig. 23) con alterno moto sale da GH in KI, e discende da KI in GH. Nella salita, la sua valvola F resta chiusa, e s' apre la valvola fissa E; l'aria dallo spazio AH spandendosi nello spazio maggiore AI divien più rada dell' aria esterna, la cui pressione sospinge l' acqua del recipiente entro la tromba. Nella discesa, s' apre la valvola F, e si chiude la E; per il che l' acqua nella tromba si tien ferma all' altezza a cui fu portata. Ma nel rialzarsi lo stantuffo segue una nuova rarefazione dell' aria, ed una nuova aspirazione

dell'acqua, che ben tosto s'inalza oltre il livello GH.

Giunta a questo segno, è palese che lo stantuffo nel salire solleva tutta l'acqua che nell'aspirazion precedente avrà sormontato il livello GH, aspirandone insieme altrettanta: e così segue elevando l'acqua sino alla richiesta altezza QD, ove giunta si versa per lo sfogo D.

501. *Coroll. I.* L'altezza GM non dovrà eccedere 10 metri, altezza della colonna d'acqua che fa equilibrio alla pressione dell'atmosfera. Altrimenti è palese che l'acqua non potrebbe arrivare al livello GH, non che oltrepassarlo.

502. *Coroll. II.* Che, anzi neppure l'altezza KM non dovrebbe eccedere 10 metri, a volere che lo stantuffo nel salire aspiri tant'acqua quanta cape nello spazio GI, nè lasci vuoto dietro di se.

503. *Scolio*. Per altro quand'anche GM e KM siano minori di 10 metri, può darsi caso che l'acqua s'arresti prima di raggiunger la base dello stantuffo, e rimanga la Tromba inservibile. Questo caso avviene allor quando nell'alzarsi lo stantuffo l'aria inferiore non si dilati niente più di quello che avesse fatto nell'aspirazion precedente. Si potrebbe rintracciare colla scorta del calcolo quando e dove possano seguire cotali

arresti (*a*) onde costruir la Tromba in guisa da evitàrli. Se non che si vede agevolmente un modo sicuro d'impedirli, ed è col fare che lo stantuffo discenda sino alla valvola fissa E, o vicinissimo ad essa.

504. *Proposizione II.* La forza necessaria per tenere in equilibrio lo stantuffo è uguale al peso d'una colonna d'acqua che abbia per base la sua testa OL, e l'altezza della colonna d'acqua sollevata QM.

Esprimeremo le pressioni (10) per l'altezza della colonna d'acqua che le rappresenta, e chiameremo A l'altezza di 10 metri che rappresenta la pressione atmosferica. Or sia lo stantuffo in OL. La sua testa è premuta all'ingiù dall'acqua di sopra con forza $= A + OQ$, ed all'insù dall'acqua di sotto con forza $= A - OM$. Dunque la total pressione che lo spinge al basso è $= OQ + OM$, o sia $= QM$. Dunque etc.

505. *Coroll. I.* La proposizione si avvera eziandio quando l'acqua non è per anche arrivata a toccar lo stantuffo. Sia il livello dell'acqua in VZ. Allora la testa dello stantuffo sarà premuta all'ingiù dall'aria interna rarefatta. Ma quest'aria insieme colla colonna acquea AV equilibra la pressio-

---

(a) *Bossut Hydrodynamique*. Edit. de 1786. *Part. I. Chap. VIII.*

ne atmosferica A; dunque la sua pressione è $= A - A V$. Quindi la total pressione sulla testa dello stantuffo torna $= A V$, o sia all' altezza della colonna acquea sollevata.

Perciò la forza richiesta a tenere equilibrato lo stantuffo va crescendo a misura che l' acqua s' inalza, e divien costante, ed eguale a $Q M$ tostochè l' acqua è salita al livello costante $Q D$.

506. *Coroll. II.* Volendosi tener conto anche del peso proprio dello stantuffo, sia questo peso eguale a quello d' un cilindro d' acqua di base $O L$, e d' altezza p; sarà la forza che equilibra lo stantuffo $= Q M + p$; o più generalmente; eguale a p più l' altezza della colonna acquea sollevata.

CAP. II.

Del moto dell' acqua nella Tromba.

507. Proposizione. Sia applicata a sollevar lo stantuffo una potenza F. Si cerca la velocità dello stantuffo in ciascun punto di sua salita da $G H$ in $K I$: prescindendo dalle resistenze, e supponendo l' acqua già sollevata all' altezza massima $Q M$.

Dicasi $Q M = h$; $G M = a$; $G O = x$; l' altezza dovuta alla velocità dello stantuffo

in $OL = s$; e il peso dello stantuffo equivalga a quello d'una colonna d'acqua d'altezza p.

Or veggiamo le forze che sollecitano lo stantuffo posto in OL. Esso è spinto in giù dal proprio peso con forza p, e dalla pressione dell'acqua sovrastante con forza $A + OQ$. È poi tratto all'insù dalla potenza F, e dalla pressione dell'acqua di sotto che lo sospinge con forza $= A - OM - s$. In tutto la forza che sollecita lo stantuffo a salire sarà dunque eguale al peso d'un cilindro d'acqua di base OL, e d'altezza $F - h - s - p$; che però facendo la base $OL = 1$, ed esprimendo per 1 la gravità specifica dell'acqua, sarà questa forza $= F - h - s - p$.

Agisce questa sulla massa del cilindro d'acqua che avendo la stessa base OL ha l'altezza $OQ + p$; la qual massa sarà dunque $= \frac{OQ + p}{g}$ o sia $\frac{h - a - x + p}{g}$. Quindi sarà la forza acceleratrice $= g . \frac{F - h - s - p}{h - a - x + p}$.

Ora la forza acceleratrice è uguale (I. 185) ad $u\,d\,u$ diviso per l'elemento dello spazio, o sia a $\frac{g\,d\,s}{d\,x}$. Avremo dunque l'equazione

$$\frac{F - h - s - p}{h - a - x + p} = \frac{d\,s}{d\,x},$$

la quale scioglie il problema.

508. *Coroll. I.* Volendosi conoscere il tempo nel quale lo stantuffo percorre un dato spazio, o acquista una data velocità, si porrà (I. 184) la forza acceleratrice $= \frac{du}{dt}$; o sia $= \frac{g\,d\,s}{d\,t\sqrt{2\,g\,s}}$.

509. *Coroll. II.* Sia la potenza F costante. L'equazione (507) integrata in guisa che $x = 0$ dia $s = 0$ darà

$$s = x \cdot \frac{F - h - p}{h - a + p}$$

Sale adunque lo stantuffo con moto equabilmente accelerato.

510. *Coroll. III.* Il valore di F ha dei limiti in più e in meno, entro i quali dee contenersi. Poichè 1.° Dovrà essere $F > h + p$; altrimenti non leverà lo stantuffo. 2.° Il valore di s non dovrà mai oltrepassare $A - OM$ che è l'altezza dovuta alla velocità con cui l'acqua di sotto insegue lo stantuffo; altrimenti quest'acqua si rimarrà indietro, e si farà un vano entro la tromba con inutile dispendio di forza. Quindi l'altezza dovuta alla massima velocità dello stantuffo, o sia $GK \cdot \frac{F - h - p}{h - a + p}$ dovrà esser minore di $A - KM$. Sia $GK = k$; dovrà essere $Fk < (A - a)(h - a + p) + ak$.

511. *Scolio*. Per dar qualche esempio, sia $QM = h = 12$ metri, $GM = a = 8$, $p = 1$, $k = 0,5$. Sarà $s = \frac{Fx - 13x}{5}$. Nè potrà la potenza motrice F esser meno di 13, nè più di 44.

Prendasi $F = 15$; cioè s' adopri una potenza equivalente al peso d' un cilindro d' acqua che avendo per base la testa dello stantuffo, sia alto 15 metri. Riuscirà $s = \frac{2x}{5}$. Quindi lo stantuffo arriverà al ritegno KI con velocità dovuta all' altezza di metri 0,2 che è una velocità di quasi due metri al minuto secondo.

Questa è la velocità ultima. La media pertanto sarà di quasi un metro, e la salita dello stantuffo si compirà in un mezzo minuto secondo all' incirca.

CAP. III.

Del moto dell' acqua nella Tromba, calcolate le resistenze.

512. Fra le resistenze che impediscono il moto dell' acqua entro la Tromba, quella che di lunga mano avanza tutte le altre proviene dalla discontinuità che nel corpo

della Tromba introduce l'angusta apertura della valvola E. Ristringasi per essa la sezione della tromba nella ragione di $1 : i$. L'altezza dovuta alla velocità colla quale l'acqua di sotto insegue lo stantuffo, in vece d'essere $A - OM$, sarà soltanto (147) $(A - OM)\, i^2$; o più esattamente (153. 171)

$$(A - OM)\, \frac{i^2}{1 - 2i + 2i^2}.$$

Qualunque di questi due coefficienti vogliasi assumere, noi per comodo del calcolo il chiameremo $1 - \beta$; onde la pressione che sospinge all'insù la testa dello stantuffo sarà $= (1 - \beta)(A - OM) - s$. Ciò posto, rifaremo il calcolo col tener conto di questa resistenza. Appresso ci occuperemo delle altre.

513. *Proposizione*. Lo stesso Problema (507) si vuol risolvere, avendo riguardo alla discontinuità.

Conservate le stesse denominazioni, la forza che deprime lo stantuffo sarà come prima $= p + A + OQ$; e quella che lo solleva $= F + (1 - \beta)(A - OM) - s$. Fatta la sottrazione, rimarrà la forza elevatrice

$$F - h - p - s - \beta(A - a - x)$$

che agisce come prima sulla massa

$$\frac{h - a + p - x}{g}$$

Pongasi per brevità $h+p+\beta(A-a)=K$, e $h-a+p=Q$. Sarà la forza acceleratrice $g.\frac{F-K-s+\beta x}{Q-x}$; onde l'equazione

$$\frac{F-K-s+\beta x}{Q-x}=\frac{ds}{dx}$$

514. *Coroll. I.* Sia F una potenza costante. L'equazione diverrà integrabile col dividerla per $Q-x$; divenendo allora

$$\frac{ds}{Q-x}+\frac{s\,dx}{(Q+x)^2}=\frac{(F-K+\beta x)\,dx}{(Q-x)^2}$$

Integrando così che $x=0$ renda $s=0$ avremo

$$s=\frac{(F-K+\beta Q)x}{Q}+\beta(Q-x)\log.\frac{Q-x}{Q}$$

Non è dunque più equabile l'accelerazione dello stantuffo.

515. *Coroll. II.* Sia F una potenza decrescente espressa da $P-\beta x$, essendo P costante. L'equazione diviene

$$\frac{P-K-s}{Q-x}=\frac{ds}{dx}$$

analoga a quella dell'art. 507, onde si ricava in simil guisa

$$s=x.\frac{P-K}{Q}$$

In questo caso la corsa dello stantuffo è uniformemente accelerata.

516. *Coroll. III.* Quì pure il valore di F

ha suoi limiti, che si troveranno come all' art. 510. Dovrà per una parte essere $P > K$; e per l'altra dovrà essere

$$G K . \frac{P - K}{Q} < (1 - \beta)(A - K M)$$

$$\text{onde } P < K + \frac{Q}{k}(1 - \beta)(A - a - k)$$

517. *Scolio I.* Ritorniam sull'esempio dell' art. 511; e sia il diametro della tromba a quello dell'apertura della valvola nella ragione di 12 a 5; sarà $i = 0,1736$; onde (512) $1 - \beta = 0,03$ ovvero più esattamente $0,04$; e $\beta = 0,96$. Quindi $K = 14,92$; $Q = 5$. Nè potrà esser P minore di 14,92; nè dovrà essere maggiore di 15,52.

Sia dunque $F = 15,24 - 0,96\, x$. Riuscirà $s = \frac{0,32\, x}{5}$. La potenza motrice sarà sul principio 15,24 e nel fine si ridurrà a 14,76; onde il suo valor medio è $= 15$, appunto qual era nel citato esempio (511). Ma frattanto le altezze dovute alla velocità dello stantuffo in questo e nel precedente caso stanno fra loro come 4 : 25 e le velocità stesse come 2 : 5. E però colla stessa forza motrice lo stantuffo si muove assai più lento, e dove prima impiegava mezzo secondo, adesso impiega secondi 1,25 a salire per l'istessa altezza di mezzo metro, e fornire

la stessa quantità d'acqua. Tanto può l'impedimento della discontinuità.

518. *Scolio II.* Gioverà dunque ingrandire la valvola quanto è possibile il farlo senza indebolirla di troppo.

Del resto il diametro della valvola dee considerarsi nel calcolo alquanto minore di quello che è realmente. E ciò 1.° in riguardo alla contrazione della vena, 2.° in riguardo all'ingombro che oppone la valvola anche aperta al passaggio dell'acqua, giacchè si vede che anche alzata la valvola l'apertura non resta del tutto libera.

Havvi ancora un'altra discontinuità in grazia della contrazione della vena al primo ingresso dell'acqua nel tubo aspirante. Ma questa può togliersi o rendersi quasi insensibile coll'arrovesciare in fuori l'imboccatura come si vede in *AY*, imitando la forma della vena contratta.

519. *Scolio III.* Gli altri impedimenti che rimangono a considerare sono i seguenti. In primo luogo il peso che conserva sott'acqua la valvola *E*. Questo peso sta a carico della potenza motrice, o per intero, come nelle valvole a coppa, o per metà come in quelle a cerniera; se non che in queste ultime vi si dee aggiungere l'attrito della cerniera. Ad ogni modo si terrà conto facilmente di questo peso della valvola coll'

accrescer d'altrettanto il peso p dello stantuffo.

520. *Scolio IV.* In secondo luogo l'attrito dello stantuffo contro la parete della tromba. Questa par che debba essere una resistenza costante, ma ci manca ogni dato sia di teoria sia d'esperienza per fissarne il valore. Volendone tener conto, gioverebbe esplorarla con una sperienza, che immediatamente si facesse nella tromba proposta, prima di darvi l'acqua.

521. *Scolio V.* Per ultimo v'è l'attrito della colonna d'acqua che sale lungo le pareti. Esprimasi questa resistenza per R. La forza che deprime lo stantuffo in QL, e che si dee vincere per sollevarlo si aumenterà del termine $R.OQ$. E d'altra parte la forza che per di sotto l'incalza, ed ajuta a sollevarlo scemerà del termine $R.OM$. In tutto la forza elevatrice si troverà diminuita della quantità $R(OQ + QM)$ o sia di Rh. E l'equazione (518) diventerà

$$\frac{F - K - Rh - s + \beta x}{Q - x} = \frac{ds}{dx}.$$

La resistenza R si esprime, siccome vedemmo (196) col binomio $au^2 + bu$, o sia $as + b\sqrt{2gs}$. I coefficienti a, b dipendono dal raggio medio, e per conseguenza dal diametro della tromba. D'ordinario questo diametro è sì grande, e sì discreta l'altezza

h, che l'effetto di questa resistenza non è guari valutabile. Ben lo sarebbe, quando il diametro del tubo aspirante fosse soverchiamente picciolo.

CAP. IV.

Della Tromba premente.

522. PROPOSIZIONE I. Spiegare l'azione della Tromba premente.

Levandosi lo stantuffo (Fig. 24) da *G H* in *K I* spinge per l'aperta valvola *E* tutta l'acqua superiore su per la tromba, ed insieme ne aspira altrettanta nel vuoto spazio *G I*. Nel ritorno, chiudendosi la valvola *E*, ed aprendosi la *F*, lo stantuffo attraversa liberamente quest' acqua *G I*, e nel rialzarsi, la solleva essa pure, attraendone altrettanta. E così va successivamente crescendo l'acqua nella tromba sino al prefisso sfogo in *Q D*.

523. *Proposizione II.* La forza necessaria a tenere in equilibrio lo stantuffo è uguale al peso d'un cilindro d'acqua avente per base la sua testa *O L*, e l'altezza *Q M* della colonna d'acqua sollevata sopra il livello del recipiente.

Poichè la testa dello stantuffo è premuta

all' ingiù dall' acqua di sopra con forza $= A + O Q$, ed all' insù dall' acqua di sotto con forza $= A + O M$. Quindi la total forza che lo spinge al basso è $= O Q - O M$, o sia $= Q M$. Dunque etc.

524. *Corollario*. Adoprandosi una potenza F maggiore di quella richiesta per l' equilibrio, solleverà essa lo stantuffo, e le leggi del suo movimento si ritroveranno nello stesso modo che si tenne trattandosi della Tromba aspirante. Quivi pure essendo la forza che deprime lo stantuffo $p + A + O Q$, e quella che lo innalza $F + A + Q M - s$, riuscirà la total forza elevatrice $F - Q M - p - s$; e questa dovrà poi dividersi per la massa della colonna d' acqua sovrastante allo stantuffo, onde avere la forza acceleratrice.

CAP. V.

Della Tromba aspirante e premente.

525. Proposizione I. Spiegare l' azione della Tromba aspirante e premente.

Lo stantuffo di questa Tromba (Fig. 25.) è cieco, vale a dire senza valvola, e nel salire da $G H$ in $K I$ attrae tant' acqua quanta cape nello spazio $G I$, passando questa

per l'aperta valvola E. Nel discender poi lo stantuffo, chiudesi la valvola E, e tutta l'acqua aspirata, per l'altra valvola F cacciasi nel tubo QFD. Un nuovo colpo dello stantuffo aspira nuov' acqua nel salire; e nel discendere la preme spingendola nel suddetto tubo QFD ove si va successivamente elevando sino in QD.

526. *Proposizione II.* La forza necessaria a tenere in equilibrio lo stantuffo in OL, durante l'aspirazione, è uguale al peso d'un cilindro d'acqua di base OL e d'altezza OM; e durante la pressione, è uguale al peso d'un cilindro d'acqua di base OL e d'altezza OQ.

Durante l'aspirazione è aperta la valvola E, e chiusa la F. Allora dunque la testa dello stantuffo è premuta all'ingiù con forza A, ed all'insù con forza $A - OM$; onde lo stantuffo è spinto al basso con forza $= OM$.

Durante la pressione sta chiusa la valvola E, ed aperta la F. Quindi la pressione dello stantuffo all'ingiù rimane A, e quella all'insù diventa $A + OQ$; onde lo stantuffo è sospinto in alto con forza $= OQ$.

527. *Corollario.* Se dall'equilibrio si passi al moto, la forza motrice si determinerà facilmente così per la salita, come per la discesa.

Nella salita essendo la pressione in giù $= A + p$, e la spinta all' insù $= F + A - OM - s$, sarà la forza elevatrice $= F - OM - p - s$.

E nella discesa essendo la pressione all' ingiù $= F + A + p$, e la spinta all' insù $= A + OQ$, sarà la forza che deprime lo stantuffo $= F - OQ + p$.

Converrà poi dividere ciascuna di queste forze per le masse sulle quali rispettivamente agiscono, affine di avere la forza, che sarà acceleratrice nella salita, e ritardatrice nella discesa.

SEZIONE SECONDA

Delle Macchine mosse dall' acqua.

CAP. VI.

Dell' azione dell' acqua pel suo urto.

548. Agisce l' acqua nel dar moto alle Macchine talora coll' urto, talor col semplice peso, e quando colla forza centrifuga, quando colla reazione, o sia col disequilibrio di sue pressioni. I due primi modi sono i più comuni, e noi su questi ci fermeremo.

529. Il determinar precisamente l'impulso dell'acqua contro le palmette o ale d'una ruota in giro, è problema cinto d'insormontabili difficoltà. Già sul principio del terzo Libro si ravvisò quanto fosse difficile il misurare l'urto dell'acqua contro un ostacolo qual siasi. E sebbene a forza di sperienze siasi pure ottenuta una qualche misura dell' impulso contro le superficie piane tanto ne' fluidi indefiniti, quanto negli angusti canali, pur queste sperienze non sono in verun modo applicabili al caso nostro. Mentre per tacer d'altre disparità, è a riflettere che le palmette si coprono in parte l'una con l'altra; e la perturbazione che la prima induce nel fluido circostante altera la direzione e la velocità colla quale vien percossa la seconda, e di mano in mano le altre. Onde nasce un ordin di cose tutto nuovo, e tutto diverso dai casi sin qui contemplati.

530. Questa disparità rendesi tuttavia maggiore nelle ruote battute dall'acqua corrente per le doccie. Quivi la palmetta chiudendo quasi del tutto la sezione vi cagiona un rigonfiamento grandissimo. L'acqua sollevata s'appoggia alla palmetta d'avanti, e tentando di ricadere, la grava di tutto il suo peso. Questa circostanza deve aggravare notabilmente l'impulso dell'acqua nella prima palmetta, e scemarlo nelle altre.

531. In una ricerca così intralciata gioverà fingerci da prima un ipotesi, qual ch'ella siasi, per poi rettificarla col paragone delle sperienze. L'ipotesi più semplice e più comunemente seguita consiste nel supporre la ruota condotta da una palmetta sola, che in tutto il suo giro sia sempre urtata direttamente; e così ridurre a un impulso costante contro quest'ala fittizia quell'impulso variabile che realmente si esercita contro più ale ad un tempo.

532. Noi dunque chiameremo A la superficie di quest' ala unica; v la velocità equabile del suo giro, vale a dire quella del suo centro di resistenza; ed in fine V la velocità equabile della corrente. Quindi mentre la Ruota equabilmente si volge, supporremo la palmetta A investita direttamente (311) colla velocità costante $V - v$. Ed in tale ipotesi calcoleremo nel Capo seguente la forza dell'acqua, ed il suo effetto. Toccherà poi alla sperienza 1.° il mostrarci se questi effetti seguano veramente le leggi che nascono dalla stabilita ipotesi. 2.° il fissare il valore A di quell'ala fittizia che intendiamo sostituita a tutte le altre, siccome ad esse equivalente.

CAP. VII.

Delle Ruote verticali.

533. Proposizione I. Dicasi F l'impulso dell'acqua contro la Ruota. Sarà per ipotesi (532)

$$F = m\,A\,(V - v)^2$$

essendo m un coefficiente costante.

534. *Scolio*. Questo coefficiente m da cui dipende la misura assoluta dell'urto avrà un valore diverso nel fluido indefinito, e nelle anguste doccie. Si determina nel primo caso per l'art. 350, nel secondo per l'art. 374.

535. *Coroll. I.* L'effetto d'una forza permanente si misura (I. 603) dal prodotto di essa forza per la velocità del suo punto d'applicazione. Adunque l'effetto della forza che fa l'acqua sulla ruota sarà
$= F\,v = m\,A\,v\,(V - v)^2$.

536. *Coroll. II.* A questo dev'essere uguale (I. 604) l'effetto della macchina, o sia il prodotto del peso sollevato per la velocità colla quale vien sollevato. Ponghiamo che la ruota sollevi il peso Q con velocità u: sarà l'effetto della macchina $Q\,u$, ed avrà luogo l'equazione

$$(X) \quad m\,A\,v\,(V - v)^2 = Q\,u.$$

537. *Coroll. III.* Di più, sia a il raggio della ruota o piuttosto la distanza fra il centro di essa e il centro di resistenza della palmetta A. E sia b il raggio del cilindro, o subbio sul quale si avviluppa la fune che tira il peso Q. Sarà necessariamente $v : u :: a : b$; onde l'equazione

$$(Y) \qquad a u = b v.$$

538. *Coroll. IV.* Data l'una delle tre quantità Q, u, v si troveranno le altre due per mezzo delle equazioni (X) (Y).

539. *Proposizione II.* Massimo sarà l'effetto della Macchina, se la velocità delle ale sia la terza parte della velocità della corrente.

Giacchè ponendo $d . F v = 0$, o sia $d . m A v (V - v)^2 = 0$, se ne trae $v = \frac{1}{3} V$.

540. *Coroll. I.* Ponendo questo valore di v nell'espressione generale dell'effetto (535) otterremo il massimo effetto della macchina

$$= \frac{4}{27} m A V^3.$$

541. *Coroll. II.* Ponendo lo stesso valore nelle due equazioni (X) (Y) indi eliminando la u, avremo l'equazione

$$(Z) \qquad 4 m A V^2 a = 9 Q b$$

la quale devrà verificarsi a volere che l'ala concepisca per l'appunto la terza parte

della velocità della corrente, e massimo ne sia l'effetto.

542. *Coroll. III.* Con questa equazione (Z) data l'una delle due quantità Q, $\frac{b}{a}$ determineremo l'altra per modo che la macchina produca l'effetto massimo.

CAP. VIII.

Sperienze sulle Ruote verticali.

543. SPERIENZA I. Una Ruota guernita di 24 palmette fu esposta (a) all' urto dell' acqua d' un canale corrente in superficie metri 1,85 al minuto secondo. Le palmette larghe m. 0,135 pescavano in acqua poco più d' un decimetro. Il raggio della ruota corrispondente al centro di resistenza della palmetta era m. 0,46; e il raggio del subbio portante la fune che traeva il peso Q era m. 0,036. Quindi $V = 1,85$; e $\frac{b}{a} = 0,0782$.

Si fecero con questa Ruota 17 sperienze coll' andar variando il peso Q, e si contava ad ogni volta il numero de' giri che faceva

(a) *Bossut Hydr.* §. 810. Edit. de 1771.

la Ruota in un dato tempo. Di qui computavasi la velocità v dell' ala, ed anche la velocità u del peso, essendo $u = 0,0782\, v$. E così potevasi confrontare con ciascuna di queste sperienze l'equazione (X) dell'art. 536.

544. *Coroll. I.* Il valore di A non riesce altrimenti costante, come pur dovrebbe riuscire, se l'ipotesi assunta reggesse. A misura che la velocità rispettiva $V - v$ s'aumenta, il valor di A va scemando sensibilmente. Ond'è a conchiudere che volendosi pur considerare l'impulso come ridotto ad una sola palmetta, quest'impulso non cresce secondo il quadrato della velocità, ma secondo una proporzione minore.

545. *Coroll. II.* Se tenti se quest'urto non possa per avventura supporsi proporzionale ad $(V - v)^n$ essendo n un esponente minor del 2. Onde all'equazione (X) surrogheremo la seguente

$$(X') \quad m\, A\, v\, (V - v) = Q\, u.$$

Ora paragonata questa equazione colle 17 memorate sperienze, entrambi i valori di n e di A riescono prossimamente costanti. E posto

$$n = 1,33 \;;\quad m\, A = 2,3$$

si soddisfa a tutte le equazioni assai bene.

Pertanto col variare della velocità, varia l'urto seguendo la ragione di $(V - v)^{1,33}$

546. *Coroll. III.* Dal che poi segue che il

massimo effetto della Macchina si averà non più quando sia v eguale al terzo di V, ma bensì quando sia $v = 0,429\ V$ eguale incirca ai due quinti di V. Il che si trova come all'art. 539 cangiando l'esponente 2 nell' 1,83. Ed appunto nella riferita serie di sperienze l'effetto comparve massimo quando la velocità dell'ala arrivò ai due quinti di quella della corrente.

547. *Coroll. IV.* Essendo $m\ A = 2,3$ ed essendo altronde il coefficiente m qual si deduce dall' art. 350 eguale a 50,974; risulta $A = 0,045$; superficie dell'ala fittizia equivalente a tutto il sistema delle ale ond' è cinta la ruota.

Ora nella nostra Ruota la superficie dell' ala che pesca in acqua non era che 0,015; tre volte minore della precedente.

Volendo adunque ridurre lo sforzo dell' acqua contro tutto il giro delle Ale a quello contro una sola palmetta, convien supporre questa palmetta unica tre volte più grande che quella della Ruota non è. Nè ciò farà maraviglia quando si rifletta che nella nostra Ruota l'arco che s'immerge nell' acqua è quasi di 78°, e che ben cinque palmette ad un tempo pescano qual più qual meno nella corrente.

Bensì è da credere che variandosi o il numero delle palmette o la loro immersione,

varierebbe il valore di A. Ma con qual regola non sapremmo dirlo finchè non cel dicano le sperienze, che sono sinora troppo scarse al bisogno.

548. *Sperienza II.* La stessa Ruota con doppio numero di palmette fu esposta (a) al corso d'una doccia sì angusta, che appena vi restava tutt'all'intorno della palmetta un millimetro di vano per lo sfogo dell'acqua. La velocità superficiale della corrente era di metri 3,609 onde (264) la velocità media 3,192. Le palmette pescavano m. 0,029. E si fecero dodici sperienze allo stesso modo di prima.

549. *Coroll. I*, L' equazione (X') dell' art. 545 posto

$$n = 1,33 \; ; \quad m\,A = 0,635$$

soddisfa lodevolmente a tutte dodici le sperienze.

550. *Coroll. II.* Dunque ancora in questo caso, l' urto dell' acqua segue la ragione di $(V - v)^{1,33}$. Ed infatti qui pure l' effetto massimo comparve, giunta la velocità dell' ala ai due quinti di quella della corrente.

551. *Coroll. III.* Essendo $m\,A = 0,635$ ed essendo altronde il coefficiente m qual si deduce dall' art. 374 eguale a 141,5 risulta $A = 0,0045$ prossimamente. La superficie

(a) *Bossut Hydr.* §. 806.

immersa dell' ala era poi = 0,0040. Qui dunque l'Ala fittizia non supera che d'un ottava parte la vera, laddove nel caso precedente n' era tripla. Eppure ancor qui l' arco subacqueo essendo di presso 40 gradi, cinque ale ad un tempo pescavano nella corrente. Malgrado ciò, l'urto è minore, il che forse si vuol ripetere dalla cagione indicata all' art. 530. E poi, come già si disse, è tuttora ignoto come dipenda il valore di *A* dal numero e dalla immersione delle palmette. La quale ignoranza ci rende pressochè inutili le formole del Capo precedente.

552. *Scolio*. Di qui si vede quanto sia il bisogno che nuove sperienze si aggiungano a rettificare ed a compiere la teoria delle Ruote idrauliche, sin qui appena abbozzata. Alle quali potrebbono anche con maggior vantaggio supplire le accurate osservazioni che si raccogliessero sulle Macchine di questo genere, confrontando la velocità della corrente e le dimensioni della macchina col di lei effetto. Queste osservazioni ci scorgerebbono con tanto maggior sicurezza, quanto meno sarebbono soggette a quelle anomalie che nelle sperienze fatte in piccolo riescono inevitabili.

CAP. IX.

Delle Ruote orizzontali.

553. Le Ruote orizzontali ordinariamente sono percosse da una vena obbliqua all' orizzonte, la quale successivamente colpisce le palmette di mano in mano che nel loro giro orizzontale si fanno ad incontrarla. Bensì procura che esse ricevano la vena direttamente; e però s' inclinano all' orizzonte in guisa che vi riescano perpendicolari.

554. *Proposizione*. Ritenuta l' ipotesi e le denominazioni dell' art. 532 dicasi k l' angolo che fa la direzione della corrente coll' orizzonte, e sarà

$$F = m\,A\,(V - v\,\cos.\,k)^2.$$

Poichè risolvendo la velocità v dell' ala in due, l' una secondo la direzione della corrente, l' altra ad essa normale, sarà la prima $v\cos k$, la seconda $v\sin.\,k$. Quest' ultima non influisce nell' urto, e l' ala è colpita coll' eccesso della velocità V della corrente sopra la velocità $v\cos.\,k$ con cui l' ala la sfugge. Onde etc.

555. *Coroll. I.* Eguagliando l' effetto della forza a quello della macchina, avremo qui pure l' equazione

$$m\,A\,v\,(V - v\,\cos.\,k)^2 = Q\,u$$

insieme coll' altra $a\,u = b\,v$.

556. *Coroll. II.* Massimo sarà l' effetto

della Macchina, quando sia $v = \frac{V}{3 \cos. k}$; ed il valore dell'effetto massimo sarà $= \frac{4 m A V^3}{27 \cos. k}$.

557. *Scolio*. Si vorrebbe ora il confronto delle sperienze per vedere se la teoria abbia d'uopo di essere modificata. Ma niuna prova ch'io sappia n'è stata fatta.

Pure atteso il modo con cui l'acqua si conduce ad urtar queste Ruote, non pare che le modificazioni del caso precedente debbano esser quì necessarie. Quì le palmette sono percosse una per volta, nè si copron fra loro, e ciascuna è urtata appunto nello stesso modo come lo è una lastra dalla vena d'un getto. Quindi purchè le palmette siano in tal numero che appena scostata l'una sottentri l'altra a ricevere l'impressione della corrente, crederei che prendendo per A la sezione della vena, e determinando il coefficiente m giusta l'art. 342, le formole riuscir dovessero esatte, e conformi alle sperienze.

CAP. X.

Dell'azione dell'acqua pel suo peso.

558. GIRANO pel semplice peso dell'acqua le Ruote a cucchiaj. Entra l'acqua per

di sopra a riempiere i cucchiaj più alti, e mentre il peso aggiunto a questi fà girare la Ruota, altri successivamente se n'empiono, e si conservan pieni sin tanto che nel girare volgendosi al basso incominciano a versar l'acqua. Si dee procurare di dar loro la forma più acconcia a tener l'acqua lungamente. Ad ogni modo si vede che dopo resa uniforme la rotazione, la forza che fa girare la Ruota consiste nel peso costante d'un armilla fluida di data grossezza, la quale circonda la periferia della ruota estendendosi dal punto ove i cucchiaj ricevon l'acqua sino al punto ove la perdono.

Ma siccome questo peso agisce sul centro di gravità di essa armilla, il qual centro non cade sulla periferia della Ruota ma dentro di essa, così per confrontare questa forza con quella dell'urto torna comodo ridurla ad una forza F che agisca sulla periferia dellaRuota. La misura di questa forza riesce come segue.

559. *Proposizione*. La forza F è uguale al peso d'una colonna d'acqua che abbia per base la sezione dell'armilla fluida, e per altezza l'altezza verticale della medesima.

Sia il raggio della ruota $= a$, la sezion dell'armilla $= A$, e la sua altezza verticale $= h$. Esprimendo la gravità specifica dell'acqua per l'unità, sarà $F = A h$.

Poichè il momento della forza che fa gi-

rare la Ruota risulta dal prodotto del peso dell' armilla fluida per la distanza orizzontale del suo centro di gravità dal centro della ruota. Quindi determinando la posizione di questo centro di gravità per le regole della Statica (I. 68) si troverà questo momento $= A a h$. E però considerandosi la forza F come applicata alla circonferenza della Ruota, risulta il suo valore $= A h$.

560. *Coroll. I.* Che se la velocità V con cui l' acqua cade sulla Ruota sia maggiore della velocità v con cui gira la periferia di essa Ruota, allora alla forza del peso s' aggiunge quella dell' urto, e sarà

$$F = A h + m A (V - v)^2 .$$

561. *Coroll. II.* Eguagliando l' effetto della forza a quello della macchina sarà

$$A h v + m A v (V - v)^2 = Q u$$

e dovrà essere insieme $a u = b v$.

562. *Coroll. III.* Perchè l' effetto divenga massimo dovrà porsi eguale a zero il differenziale di $A h v + m A v (V - v)^2$; onde

$$v = \frac{2}{3} V + \sqrt{\left(\frac{1}{9} V^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{m}\right)}$$

Fine del Secondo Volume.

TAVOLA DE' CAPITOLI

LIBRO I.

Dell' Equilibrio de' fluidi.

LIBRO II.

Del Moto de' fluidi.

SEZIONE I. Dell' Efflusso dalle luci de' vasi.

SEZIONE II. Del Moto dell' acqua pei Tubi.

SEZIONE III. Del Moto dell'acqua per gli Alvei.

LIBRO III.

Della Resistenza de' fluidi.

LIBRO IV.

Delle Opere idrauliche.

LIBRO V.

Delle Macchine idrauliche.

SEZIONE I. Delle Macchine elevatrici dell'acqua.

SEZIONE II. Delle Macchine mosse dall' acqua.

Tavola I

5.

7.

14.

Tavola II